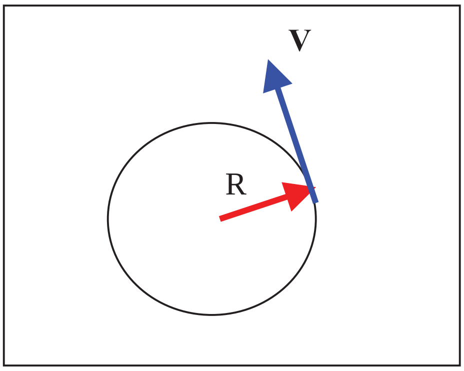
Un punto materiale si muove lungo una circonferenza di raggio 20 cm con frequenza di 5,0 Hz. Calcolare la velocità tangenziale ed il numero di giri compiuti in 20 s.

Soluzione



La velocità tangenziale la calcoliamo attraverso la sua definizione:

$$V = 2\pi Rf = 2\pi \cdot 0{,}2 \cdot 5{,}0 = 6{,}28 m/s$$

Dal concetto di frequenza (numero di giri compiuti in un secondo) ricaviamo che il numero di giri compiuti in 20 s è dato da:

$$N = 20 \cdot f = 20 \cdot 5 = 100 \text{ giri}$$

Problema N. 6

Supponendo che la Terra si muove intorno al Sole lungo un'orbita circolare di raggio R = 150 · 10^6 km, determinare la velocità tangenziale in km/s e l'accelerazione centripeta in m/s^2, tenendo presente che il periodo di rivoluzione è di 365 giorni.

Soluzione

La velocità tangenziale e l'accelerazione centripeta le calcoliamo attraverso le loro definizioni:

$$V = \frac{2\pi R}{T} = \frac{2\pi \cdot 150 \cdot 10^6}{31{,}5 \cdot 10^6} \cong 30 km/s$$

$$a_C = \frac{V^2}{R} = \frac{(30 \cdot 10^3)^2}{150 \cdot 10^6 \cdot 10^3} \cong 6 \cdot 10^{-3} m/s^2$$

notare:
365 giorni = 31,5 · 10^6 secondi
30 km/s = 30 · 10^3 m/s
150 · 10^6 km = 150 · 10^6 · 10^3 m

Problema N. 7

Secondo il modello atomico di Bohr – Rutherford l'elettrone di un atomo d'idrogeno ruota intorno al nucleo su determinate orbite. In condizioni di non eccitazione l'elettrone ruota con velocità tangenziale V = 2,18 · 10^6 m/s e con accelerazione centripeta a_c = 8,97 · 10^{22} m/s^2. Determinare il raggio dell'orbita, la velocità angolare e la frequenza.

Soluzione

Il raggio dell'orbita lo calcoliamo come formula inversa dell'accelerazione centripeta:

$$a_C = \frac{V^2}{R} \Rightarrow R = \frac{V^2}{a_C} = \frac{(2{,}18 \cdot 10^6)^2}{8{,}97 \cdot 10^{22}} = 0{,}53 \cdot 10^{-10}\,\mathrm{m}$$

La velocità angolare la calcoliamo come formula inversa della legge che la lega alla velocità tangenziale:

$$V = \omega R \Rightarrow \omega = \frac{V}{R} = \frac{2{,}18 \cdot 10^6}{0{,}53 \cdot 10^{-10}} = 4{,}1 \cdot 10^{16}\,\mathrm{rad/s}$$

La frequenza è data dalla formula inversa della definizione di velocità tangenziale:

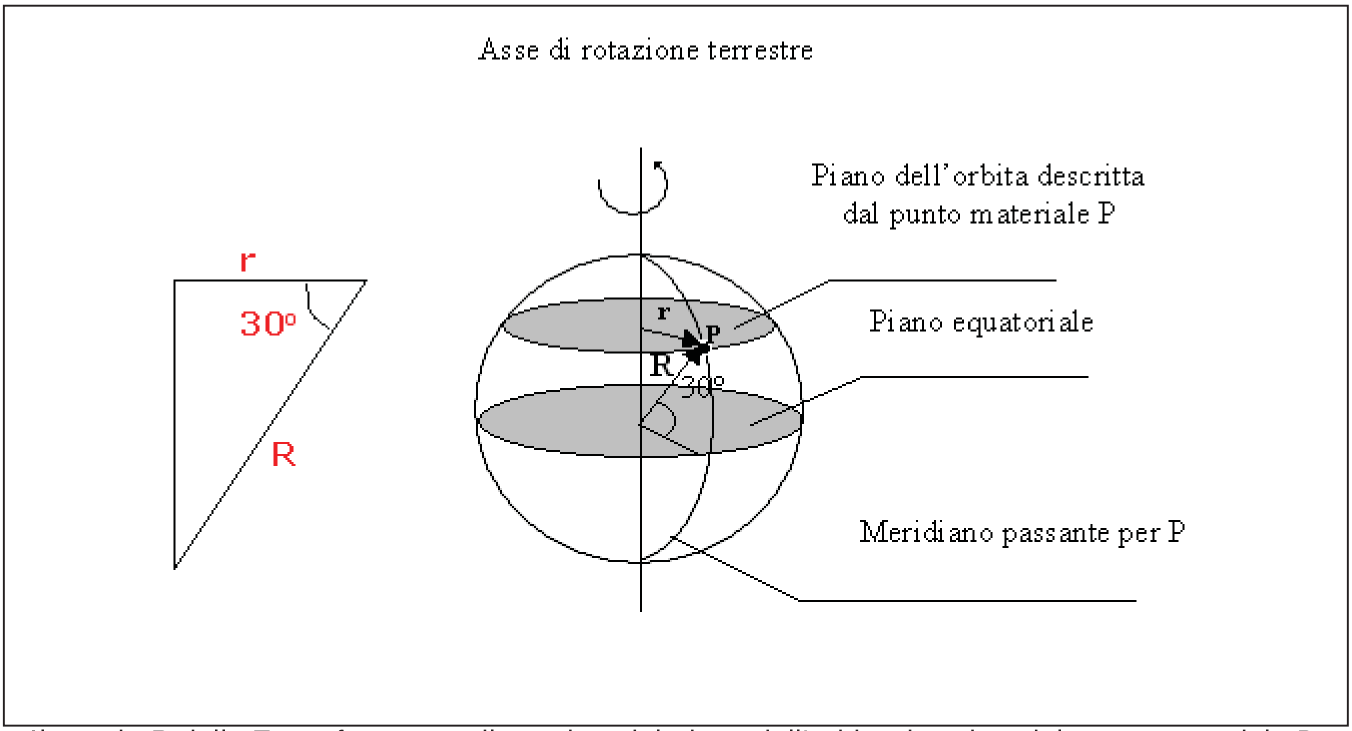
$$V = 2\pi R f \Rightarrow f = \frac{V}{2\pi R} = \frac{2{,}18 \cdot 10^6}{2\pi \cdot 0{,}53 \cdot 10^{-10}} = 0{,}65 \cdot 10^{16}\,\mathrm{Hz}$$

Problema N. 8

Calcolare la velocità e l'accelerazione di un punto materiale situato sulla superficie terrestre a 30° di latitudine Nord.

Soluzione

Rappresentiamo graficamente il problema:



Il raggio R della Terra forma con il raggio r del piano dell'orbita descritta dal punto materiale P un triangolo rettangolo, per cui utilizzando la relativa relazione trigonometrica otteniamo:

$$r = R \cdot \cos 30° = 6{,}38 \cdot 10^6 \cdot 0{,}866 = 5{,}52 \cdot 10^6\,\mathrm{m}$$

Pertanto la velocità e l'accelerazione centripeta del punto materiale P saranno date da:

$$V = \frac{2\pi r}{T} = \frac{2\pi \cdot 5{,}52 \cdot 10^6}{86400} = 402 m/s$$

$$a_C = \frac{V^2}{r} = \frac{402^2}{5{,}52 \cdot 10^6} = 2{,}92 \cdot 10^{-2} m/s^2$$

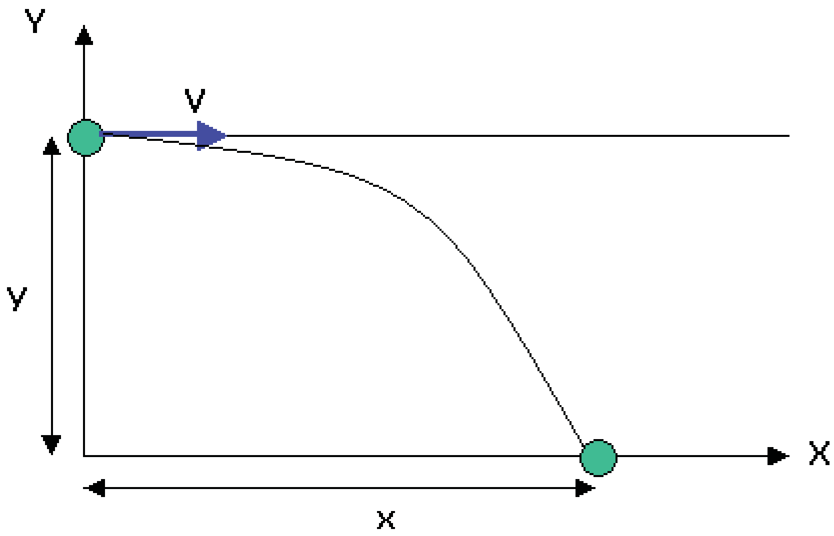
dove T = 24 ore = 86400 secondi

Problema N. 9

Un pacco abbandonato da un aeroplano in volo orizzontale a 200 m/s, tocca terra dopo 12 s. Calcolare l'altezza dell'aeroplano, la distanza orizzontale percorsa dal pacco e la velocità con cui esso tocca il suolo, trascurando la resistenza dell'aria.

Soluzione

Rappresentiamo il problema:



Il moto del pacco è un moto parabolico, che è un moto risultante di un moto uniformemente accelerato e di un moto rettilineo uniforme:

$$\begin{cases} x = V_0 \cdot t \\ y = \frac{1}{2} g \cdot t^2 \end{cases} \Rightarrow y = \frac{g}{2V_0^2} x^2 = ax^2$$

Calcoliamo la distanza orizzontale percorsa dal pacco utilizzando la prima equazione:

$$x = 200 \cdot 12 = 2400 m$$

Per poter calcolare l'altezza dell'aeroplano ci serviamo della seconda equazione:

$$y = \frac{9{,}8}{2 \cdot 200^2} \cdot 2400^2 = 706 m$$

La velocità con cui tocca il suolo la calcoliamo come:

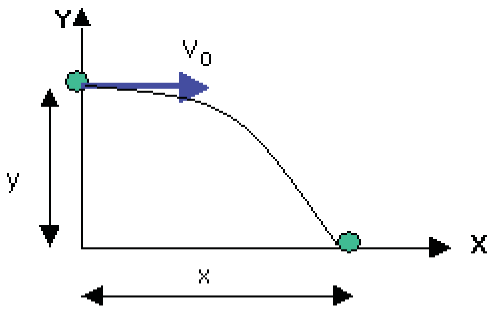
$$V = g \cdot t = 9{,}8 \cdot 12 = 118 m/s$$

Problema N. 10

Un proiettile è stato sparato orizzontalmente dall'altezza di 49 m e tocca il suolo alla distanza orizzontale di 2000 m. Calcolare la velocità con cui è stato sparato.

Soluzione

La velocità la ricaviamo come incognita dall'equazione della parabola che descrive il moto parabolico:



$$y = \frac{g}{2V_0^2} x^2 \Rightarrow 2yV_0^2 = gx^2 \Rightarrow V_0^2 = \frac{gx^2}{2y} \Rightarrow V_0 = \sqrt{\frac{gx^2}{2y}} = \sqrt{\frac{9{,}8 \cdot 2000^2}{2 \cdot 49}} = 632 m/s$$

Problema N. 11

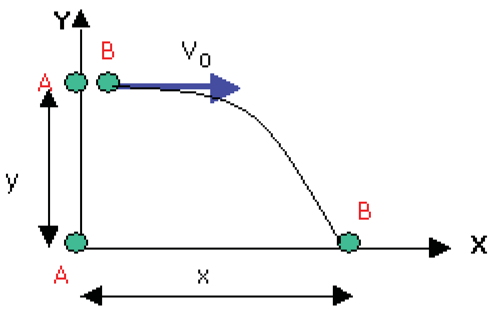
Due corpi A e B si trovano su una torre alta 490 m. Il corpo A viene lasciato cadere verso il basso e, nello stesso istante, B viene lanciato con velocità orizzontale di 50 m/s. Quale dei due corpi tocca prima il suolo? Quanto vale la distanza tra A e B quando sono a terra?

Soluzione

- Il moto verticale di un corpo, che cadendo si sposta anche orizzontalmente, è identico al moto verticale di un corpo in caduta libera, per cui i due corpi A e B toccano terra contemporaneamente.

- La distanza tra A e B quando sono a terra la calcoliamo dall'equazione che descrive il moto parabolico di B:

$$y = \frac{g}{2V_0^2} x^2 \Rightarrow 2V_0^2 y = gx^2 \Rightarrow x^2 = \frac{2V_0^2 y}{g} \Rightarrow x = \sqrt{\frac{2V_0^2 y}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 50^2 \cdot 490}{9{,}8}} = 500m$$



Problema N. 12

A un aereo da bombardamento è affidato è affidato il compito di bombardare un sommergibile da una quota di 7840 m. Calcolare il tempo che il sommergibile ha a disposizione per immergersi.

Soluzione

Il tempo che il sommergibile ha a disposizione per immergersi non è altro che il tempo che impiega la bomba per colpirlo. Tenendo conto del principio di indipendenza dei movimenti simultanei, tale tempo è dato da:

$$y = \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2y}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 7840}{9{,}8}} = 40s$$

Problema N. 13

Una palla viene lanciata orizzontalmente da un'altezza di 4,8 m con velocità iniziale di 4,5 m/s. Si chiede: la palla riuscirà a centrare un canestro posto a terra a distanza orizzontale di 6,2 m?

Soluzione

Il tempo di caduta della palla è dato da:

$$y = \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2y}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 4{,}8}{9{,}8}} = 0{,}990s$$

In questo tempo la palla può percorrere una distanza orizzontale pari a:

$$x = V_0 \cdot t = 4{,}5 \cdot 0{,}990 = 4{,}5m$$

per cui non riuscirà a centrare il canestro che è posto alla distanza di 6,2 m.

Problema N. 14

Un punto materiale si muove di moto armonico con legge oraria: $x = 50\cos\frac{\pi}{32}t$

Calcolare il periodo, la velocità e l'accelerazione dopo 10 secondi.

Soluzione

La legge oraria del moto armonico è la seguente:

$$x = R \cdot \cos \omega t$$

che confrontata con quella del problema si ricava che:

$$R = 50m \qquad \omega = \frac{\pi}{32}\ \text{rad/s}$$

Quindi:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{32}} = 64s$$

$$v = -\omega R \cdot \sin \omega t = -\frac{\pi}{32} \cdot 50 \cdot \sin \frac{\pi}{32} \cdot 10 = -4{,}1 m/s$$

$$a = -\omega^2 x = -\frac{\pi^2}{1024} \cdot 50 \cdot \cos \frac{\pi}{32} \cdot 10 = -0{,}48 m/s^2$$

Problema N. 15

Un punto materiale si muove di moto circolare uniforme con periodo di 48 s sopra una circonferenza di raggio 40 cm. Calcolare l'equazione oraria dei due moti armonici, proiezioni del moto circolare uniforme su due diametri perpendicolari, nell'ipotesi che il punto al tempo t = 0 si trovi ad un estremo dei due diametri.

Soluzione

L'equazione oraria dei moti armonici lungo l'asse X e Y è la seguente:

$$x = R \cdot \cos \omega t \qquad\qquad y = R \cdot \sin \omega t$$

Dai dati del problema si ricava che:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{48} = \frac{\pi}{24}$$

quindi le leggi orarie diventano:

$$x = 40 \cdot \cos \frac{\pi}{24} t \qquad\qquad y = 40 \cdot \sin \frac{\pi}{24} t$$

Problema N. 16

Le proiezioni di un moto circolare uniforme sopra due diametri ortogonali si muovono di moto armonico secondo le leggi orarie:

$$x = 25 \cdot \cos \frac{\pi}{8} t \qquad\qquad y = 25 \cdot \sin \frac{\pi}{8} t$$

con x e y espressi in cm.

Determinare il valore della velocità e dell'accelerazione dopo 8 s ed il valore dell'accelerazione centripeta del moto circolare uniforme.

Soluzione

Dalle leggi orarie del moto armonico fornite dal problema si ricava che:

$$R = 25cm \qquad \omega = \frac{\pi}{8}\ rad/s$$

Per determinare il valore della velocità e dell'accelerazione lungo i diametri ortogonali, applichiamo le rispettive leggi orarie:

$$V_x = -\omega R \cdot \sin \omega t = -\frac{\pi}{8} \cdot 25 \cdot \sin \frac{\pi}{8} \cdot 8 = 0 \qquad V_y = -\omega R \cdot \cos \omega t = -\frac{\pi}{8} \cdot 25 \cdot \cos \frac{\pi}{8} \cdot 8 = -9{,}8cm/s$$

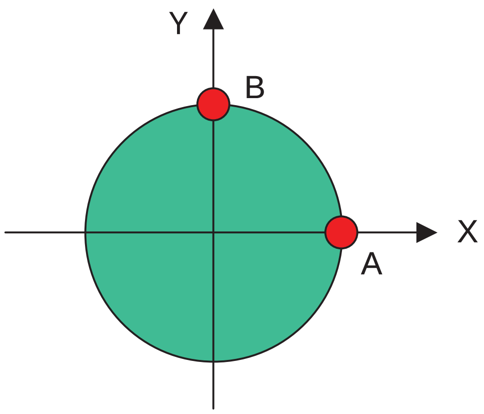
$$a_x = -\omega^2 x = -\frac{\pi^2}{64} \cdot 25 \cdot \cos \frac{\pi}{8} \cdot 8 = 3{,}9cm/s^2 \qquad a_x = -\omega^2 x = -\frac{\pi^2}{64} \cdot 25 \cdot \sin \frac{\pi}{8} \cdot 8 = 0$$

L'accelerazione centripeta del moto circolare uniforme sarà calcolata come segue:

$$a_c = \omega^2 R = \frac{\pi^2}{64} \cdot 25 = 3{,}9cm/s^2$$

Problema N. 17

Un punto materiale descrive una traiettoria circolare di raggio R = 10 m partendo dal punto A ed impiega 10 s per raggiungere il punto B:



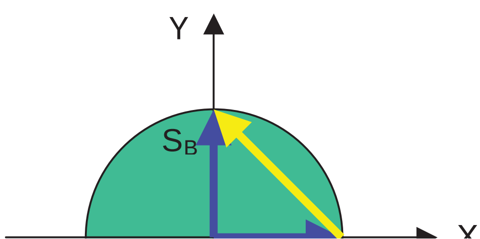
Calcolare:

- Il vettore spostamento e rappresentarlo graficamente
- Il cammino percorso
- La velocità media

Soluzione

- La rappresentazione grafica del vettore spostamento è la seguente:

$$\Delta\vec{S} = \vec{S}_B - \vec{S}_A$$



ΔS

S_A

Mentre il modulo del vettore spostamento è dato da:

$$\Delta S = \sqrt{R^2 + R^2} = \sqrt{10^2 + 10^2} = 14{,}14 m$$

- Spostandosi da A a B il punto materiale percorre un quarto di circonferenza, pari a π/2 rad, per cui il cammino percorso sarà:

$$L = \frac{\pi}{2} \cdot R = \frac{\pi}{2} \cdot 10 = 15{,}7 m$$

- La velocità media, tenendo sempre conto che il punto materiale percorre π/2 rad, la determiniamo attraverso la sua definizione:

$$V = \frac{\frac{\pi}{2} \cdot R}{t} = \frac{\frac{\pi}{2} \cdot 10}{10} = 1{,}57 m/s$$

PROBLEMA N. 18

Due moti armonici tra loro ortogonali hanno le seguenti leggi orarie:

$$x = 10 \cos 2\pi t \qquad y = 20 \cos 2\pi t$$

Determinare la traiettoria del moto risultante.

SOLUZIONE

L'equazione della traiettoria del moto risultante, ossia y = f(x), la determiniamo mettendo a sistema le due equazioni:

$$\begin{cases} x = 10 \cdot \cos 2\pi t \\ y = 20 \cdot \cos 2\pi t \end{cases}$$

Ricavando la t dalla prima equazione: $t = \frac{x}{10 \cdot \cos 2\pi}$ e sostituendola nella seconda otteniamo:

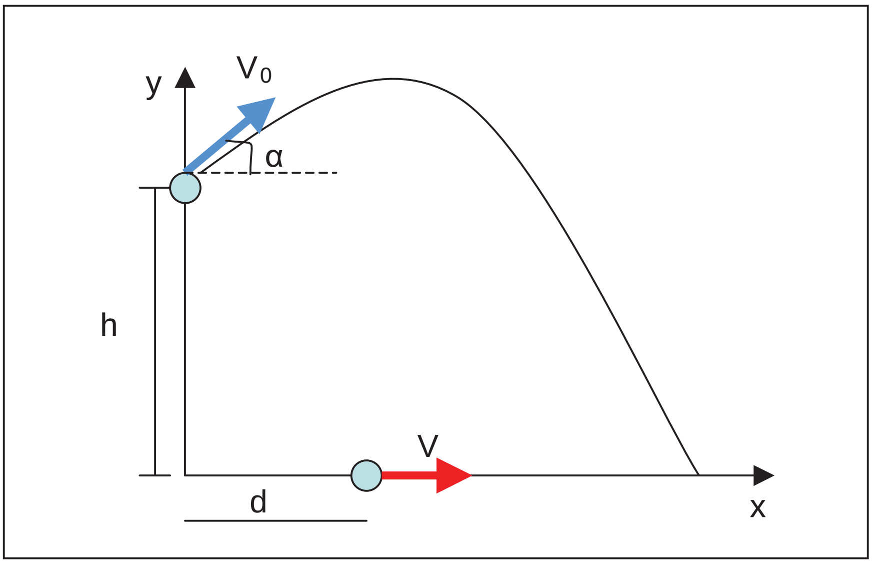
$$y = 20 \cdot \cos 2\pi \cdot \frac{x}{10 \cdot \cos 2\pi} = 2x$$

Dall'equazione trovata si conclude che la traiettoria è una retta.

PROBLEMA N. 19

Un pallone viene lanciato con un angolo α = 30° dalla sommità di un palazzo alto 20 m come. La velocità iniziale sia V_0 = 10 m/sec. Nello stesso istante, da un punto che si trova a 40 m dalla base del palazzo, un uomo corre per cercare di prendere il pallone quando questo tocca il suolo. Quale deve essere la velocità dell'uomo per poter prendere il pallone? Trascurare la resistenza dell'aria.

Soluzione



Occorre calcolare il punto di impatto del pallone col suolo e il tempo di volo per poter calcolare la velocità dell'uomo. Dividiamo il moto del pallone nelle sue componenti orizzontale e verticale. Il moto del pallone e' uniforme lungo la proiezione orizzontale con velocità:

$$V_{0x} = V_0 \cdot \cos\alpha = 10 \cdot 0{,}866 = 8{,}66 m/s$$

Il moto del corpo e' uniformemente ritardato nel moto verso l'alto e uniformemente accelerato nel moto verso il basso nella sua componente verticale. La velocità iniziale lungo la verticale sara':

$$V_{0y} = V_0 \cdot \sin\alpha = 10 \cdot 0{,}5 = 5 m/s$$

Nel moto verso l'alto la legge oraria sara':

$$y = y_0 + V_{0y} t - \frac{1}{2} g t^2$$

Nel punto di massima altezza il corpo si ferma per cui possiamo calcolare il tempo di salita:

$$V_{0y} = g \cdot t_S \Rightarrow t_S = \frac{V_{0y}}{g} = \frac{5}{9{,}8} = 0{,}5 s$$

e in questo tempo percorre un tratto:

$$y_1 = V_{0y} \cdot t_1 - \frac{1}{2} g t_1^2 = 5 \cdot 0{,}5 - \frac{1}{2} \cdot 9{,}8 \cdot 0{,}5^2 = 1{,}3 m$$

Il corpo raggiunge quindi un'altezza totale, rispetto al suolo pari a:

$$y_2 = h + y_1 = 20 + 1{,}3 = 21{,}3m$$

Da questo momento in poi il corpo si muove verso il basso partendo dall'altezza y_2 con velocità nulla. La sua legge oraria sara':

$$y = y_2 - \frac{1}{2}gt^2$$

Esso raggiunge il suolo quando y = 0, per cui il tempo impiegato sarà:

$$0 = y_2 - \frac{1}{2}gt_2^2 \Rightarrow t_2 = \sqrt{\frac{2y_2}{g}}$$

Il tempo di volo totale sara' quindi:

$$t = t_1 + t_2 = 0{,}5 + 2{,}1 = 2{,}6s$$

In questo tempo la sua proiezione orizzontale percorre una distanza:

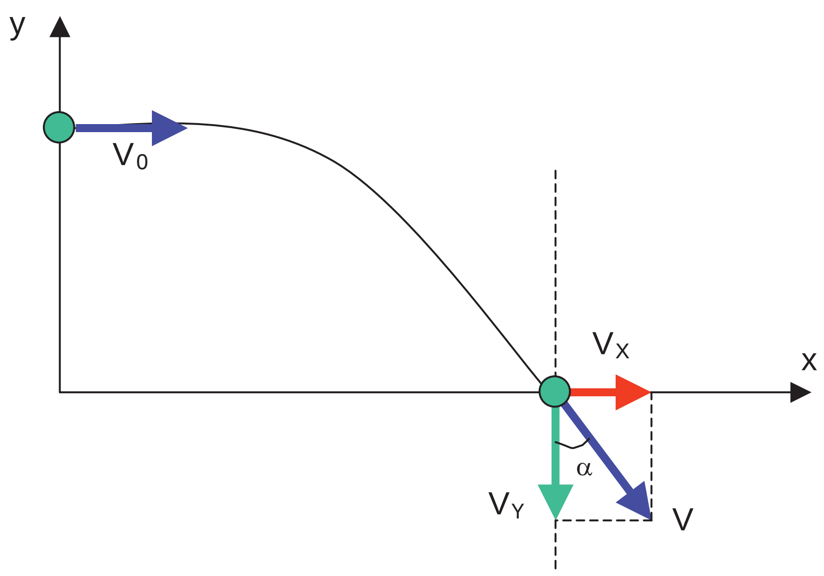
$$x = V_{0x} \cdot t = 8{,}7 \cdot 2{,}6 = 22{,}6m$$

Trovandosi l'uomo a 40 m deve percorrere una distanza x = 40 - 22.6 = 17,4 m in un tempo t = 2,6 s per cui la sua velocità sara':

$$V = \frac{x}{t} = \frac{17{,}4}{2{,}6} = 6{,}7m/s$$

PROBLEMA N. 20

Un corpo viene lanciato, con una velocità iniziale orizzontale V_0 = 10 m/sec da un palazzo alto h = 35 m come in figura. Determinare: a) Il tempo di volo; b) la distanza X, misurata dalla base del palazzo, del punto d'impatto del corpo col suolo; c) l'angolo formato dalla direzione della velocità con la verticale al momento dell'impatto.



SOLUZIONE