Esempi di esercizi risolti (moto unidimensionale)

Esempio 1
Un'auto sta procedendo con velocità costante $v_0 = 120$ km/h su un tratto rettilineo di autostrada.

a) Quanto tempo impiega a percorrere un tratto lungo 25 m?
b) Se all'istante t=0 si trovava al km 348 dell'autostrada, dove si troverà dopo 10 minuti?

Soluzione
Esprimiamo la velocità in m/s:

$$120\,\frac{\text{km}}{\text{h}} = 120\,\frac{\text{km}}{\text{h}}\cdot 1\cdot 1 = 120\,\frac{\text{km}}{\text{h}}\cdot\left(\frac{1000\,\text{m}}{1\,\text{km}}\right)\cdot\left(\frac{1\,\text{h}}{3600\,\text{s}}\right) = 120\cdot\frac{1}{3.6}\,\frac{\text{m}}{\text{s}} = 33.3\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

a) $v = \Delta x/\Delta t \;\Rightarrow\; \Delta t = \Delta x/v$ = (25 m)/(33.3 m/s) = 0.75 s
b) $x = x_0 + vt$; poiché abbiamo x_0 espresso in km, vogliamo che anche vt lo sia. Poiché abbiamo t in minuti, ci è comodo esprimere la velocità in km/minuto (alternativamente, si può ad esempio esprimere t in secondi e usare la velocità in km/s, o il tempo in ore e usare la velocità in km/h).

$$120\,\frac{\text{km}}{\text{h}} = 120\,\frac{\text{km}}{\text{h}}\cdot 1 = 120\,\frac{\text{km}}{\text{h}}\cdot\left(\frac{1\,\text{h}}{60\,\text{min}}\right) = 120\cdot\frac{1}{60}\,\frac{\text{km}}{\text{min}} = 2.00\,\frac{\text{km}}{\text{min}}$$

dunque $x = x_0 + vt$ = 348 + (2.00 km/min) (10 min) = 348 + 20.0 = 368.
L'auto dopo 10 minuti si troverà al km 368.

Esempio 2

Una pallina cade con accelerazione costante g = 9.81 m/s^2. Se parte da ferma (v_0= 0)

a) dopo quanto tempo avrà raggiunto la velocità di 10.0 m/s?
b) di quanto sarà caduta a quell'istante?

Soluzione
Si tratta di moto uniformemente accelerato.

a) $v(t) = v_0 + at$.
Dato che $v_0 = 0$ e $a = g$,
$v(t) = gt$ ovvero $t = v/g$ = (10.0 m/s)/(9.81 m/s^2) = 1.02 s

b) $x(t) = x_0 + v_0 t + ½\, at^2 = ½\, gt^2$.
Ma $t = v/g$, dunque $x(t) = ½\, gt^2 = ½\, v^2/g$ = ½ (10.0m/s)^2/(9.81 m/s^2) = 5.10 m

Esempio 3 (moto rettilineo)

Un treno che percorre un tratto rettilineo di metropolitana parte fermo da una stazione e si muove con accelerazione costante raggiungendo la velocità di 120 km/h in un minuto (60 s). Procede poi a velocità costante per altri due minuti a velocità costante e quindi frena fermandosi di nuovo in un minuto alla stazione successiva.
Quanto distano le due stazioni?

Soluzione
Durante il primo minuto il treno si muove di moto uniformemente accelerato con velocità iniziale nulla $v_0 = 0$. La sua accelerazione è data da $a = \Delta v/\Delta t$.
Esprimiamo la velocità in m/s con il solito metodo:

v = (120 km/h)= (120 km/h) (1000 m/1 km) (1 h / 3600 s) = (120/3.60) m/s = 33.3 m/s

Sapendo che Δt_1 = 60 s l'accelerazione sarà
$a = \Delta v/\Delta t$ = (33.3 m/s)/(60 s) = 0.556 m/s^2.

La distanza percorsa nel tempo Δt_1 sarà dunque

$\Delta x_1 = ½\, a(\Delta t_1)^2$ = (1/2)(0.556 m/s^2)(60 s)^2 = 1000 m = 1.0 km

(Notiamo che poiché $a = \Delta v/\Delta t$ avremmo potuto anche procedere così:
$\Delta x_1 = ½\, a(\Delta t_1)^2 = ½\, \Delta v\, \Delta t_1$ = ½ (120 km/h) (1 min) = (60 km/h) (1/60) h = 1.0 km)

Nei due minuti successivi il treno procede di moto rettilineo uniforme a velocità costante v=120 km/h. Percorre dunque una distanza pari a

$\Delta x_2 = v\Delta t_2$ = (33.3 m/s)(120 s) = 4000 m = 4.0 × 10^3 m

(esprimendo il risultato con due cifre significative)

Nell'ultimo tratto, quello in cui decelera passando in un minuto da velocità v a velocità 0, il treno si muove di nuovo con accelerazione costante (negativa), uguale in valore assoluto a quella che aveva avuto nel primo tratto (infatti Δt è lo stesso e i Δv sono uguali in valore assoluto). Per calcolare la distanza si può procedere in due modi:

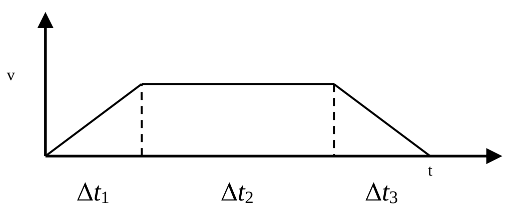
1) applicando pedissequamente la formula
   $\Delta x = v_0\Delta t + ½\, at^2$

   con $v_0 = v$ = 33.3 m/s e a = – 0.556 m/s^2 (trovati per il caso del primo tratto)
   Abbiamo

   $\Delta x_3 = v\Delta t_3 - ½\, a\, \Delta t_3^2$ = (33.3 m/s) (60 s) – (1/2)(0.556 m/s^2) (60 s)^2 = 1.0 × 10^3 m = Δx_1

2) notando che il moto nel tratto decelerato è identico a quello nel tratto accelerato, ma «visto all'indietro nel tempo». La distanza percorsa sarà perciò uguale. Altrimenti detto, i due triangoli all'inizio e alla fine del grafico velocità-tempo sono simmetrici e hanno dunque la stessa area (che corrisponde alla distanza percorsa). Dunque $\Delta x_3 = \Delta x_1$.

La distanza totale sarà dunque $\Delta x = \Delta x_1 + \Delta x_2 + \Delta x_3$ = 6.0 × 10^3 m = 6.0 km



Esempio 4 (moto circolare uniforme)
Sapendo che il raggio della Terra è circa 6.4×10^6 m (6400 km) e che la Terra compie un giro su sé stessa in 24 ore, calcolare

a) quanto vale la velocità lineare di un punto che si trova all'equatore:
b) quanto vale la sua accelerazione centripeta

Soluzione

a) Il punto che si trova all'equatore descrive un moto circolare uniforme di raggio $R = 6.4 \times 10^6$ m e di periodo $T = 24$ h. La lunghezza della circonferenza percorsa vale $C = 2\pi R = 6.28 \cdot 6.4 \times 10^6$ m $= 40.2 \times 10^6$ m $= 4.02 \times 10^7$ m (per il momento teniamo tre cifre significative anziché due, arrotonderemo a due cifre solo alla fine: in questo modo si evita di cumulare gli effetti degli errori di arrotondamento).
Il tempo in cui viene percorsa la distanza C è un periodo, cioè T = 24 h = 24 h · (3600 s/1h) = 86400 s = 8.64×10^4 s.
La velocità lineare sarà dunque $v = C/T = 4.02 \times 10^7$ m / 8.64×10^4 s $= 0.465 \times 10^3$ m/s $\approx 4.7 \times 10^2$ m/s (470 metri al secondo, ovvero circa 1700 km/h),

b) L'accelerazione centripeta vale $a = \omega^2 R = v^2/R = (4.65 \times 10^2 \text{ m/s})^2 / (6.4 \times 10^6 \text{ m}) = 3.4 \times 10^{-2}$ m/s^2 (notiamo che vale circa un trecentesimo dell'accelerazione di gravità)