Statica del corpo umano

Condizioni di equilibrio

Leve

Statica del corpo:

- avambraccio
- anca:
  - equilibrio del corpo
  - equilibrio dei vari componenti
- ginocchio
- caviglia
- schiena

Condizioni di equilibrio

Corpo umano e' assimilabile a un corpo rigido (che si modifica Nel tempo) e quindi valgono le condizioni viste in precedenza:

$\sum \vec{F}_i = 0$

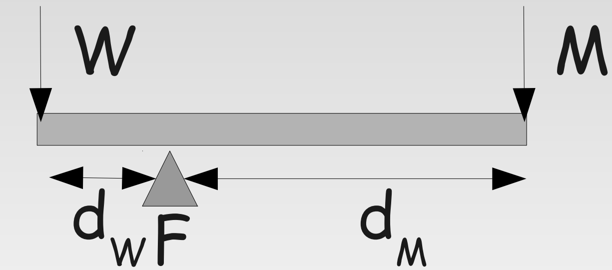
$\sum \vec{\tau}_i = 0$ dove $\vec{\tau}_i = \vec{r}_i \wedge \vec{F}_i$ momento della forza i-esima rispetto al polo scelto.

Studieriemo il moto piano e il tipo di problemi che affronteremo puo' essere schematizzato dalle leve che sono classificabili in tre classi: prima, seconda e terza.

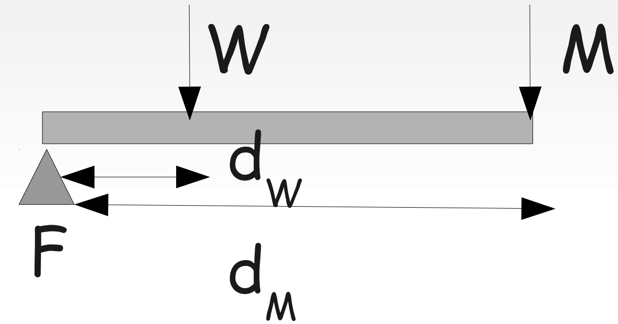
Le leve

Notazione: M=muscle, W=weight

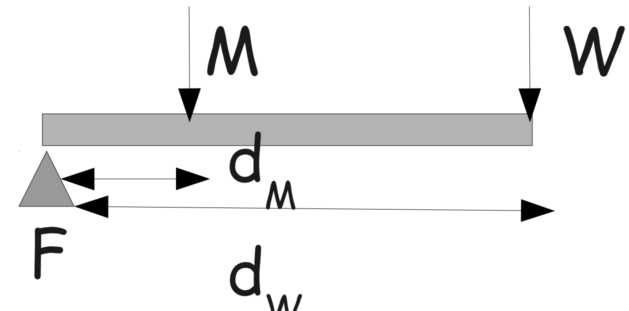
a) leve di prima classe



b) leve di seconda classe



c) leve di terza classe



In ogni caso il momento e' zero se $Md_M = Wd_W$ da cui si ricava: $M = d_W/d_M W$, la forza da applicare per sostenere il peso W

Esempi di leve

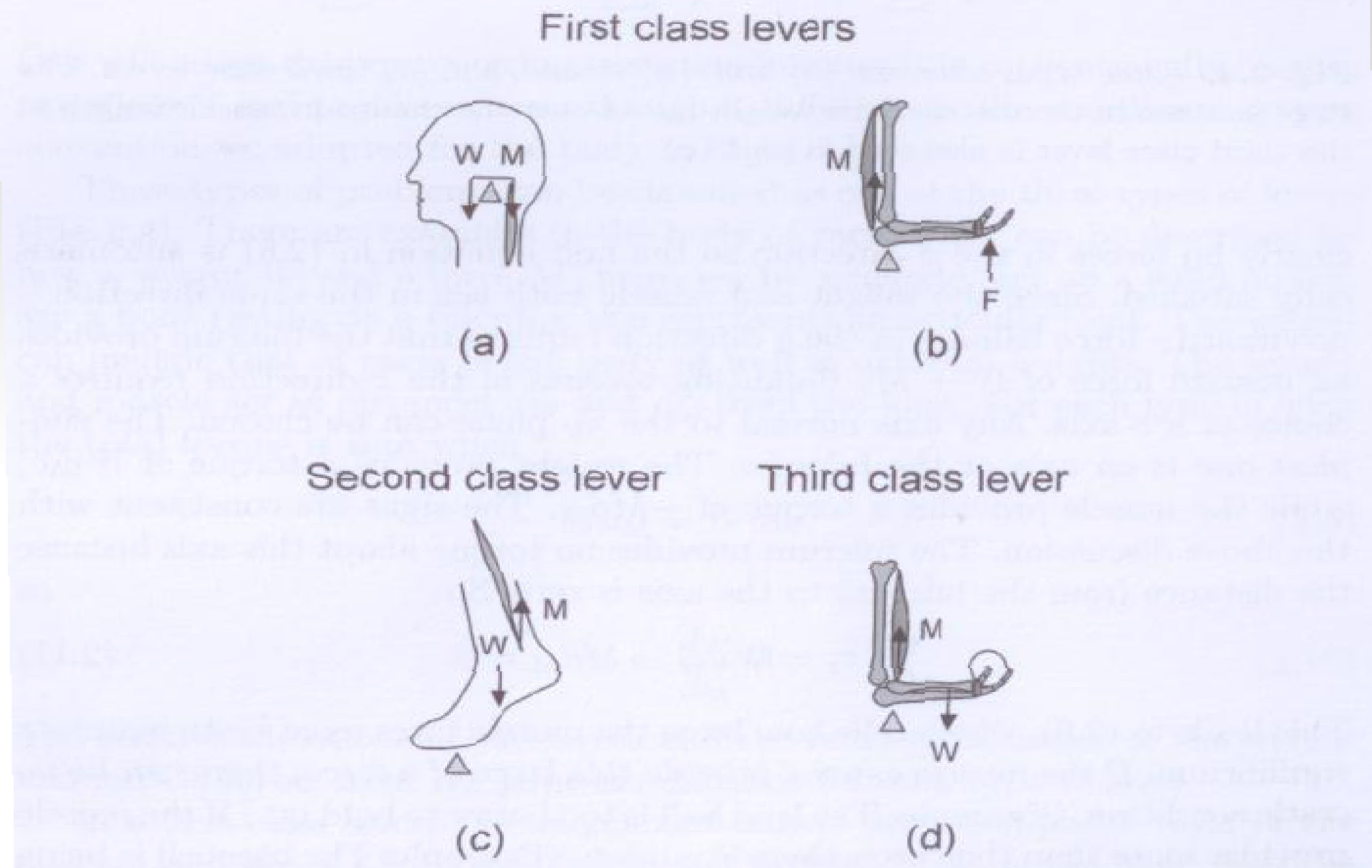


Fig. 2.6. Examples of first (**a**, **b**), second (**c**), and third (**d**) class levers in the body

Avambraccio

Studiamo l'avambraccio usando diversi modelli sempre piu' realistici e complessi.

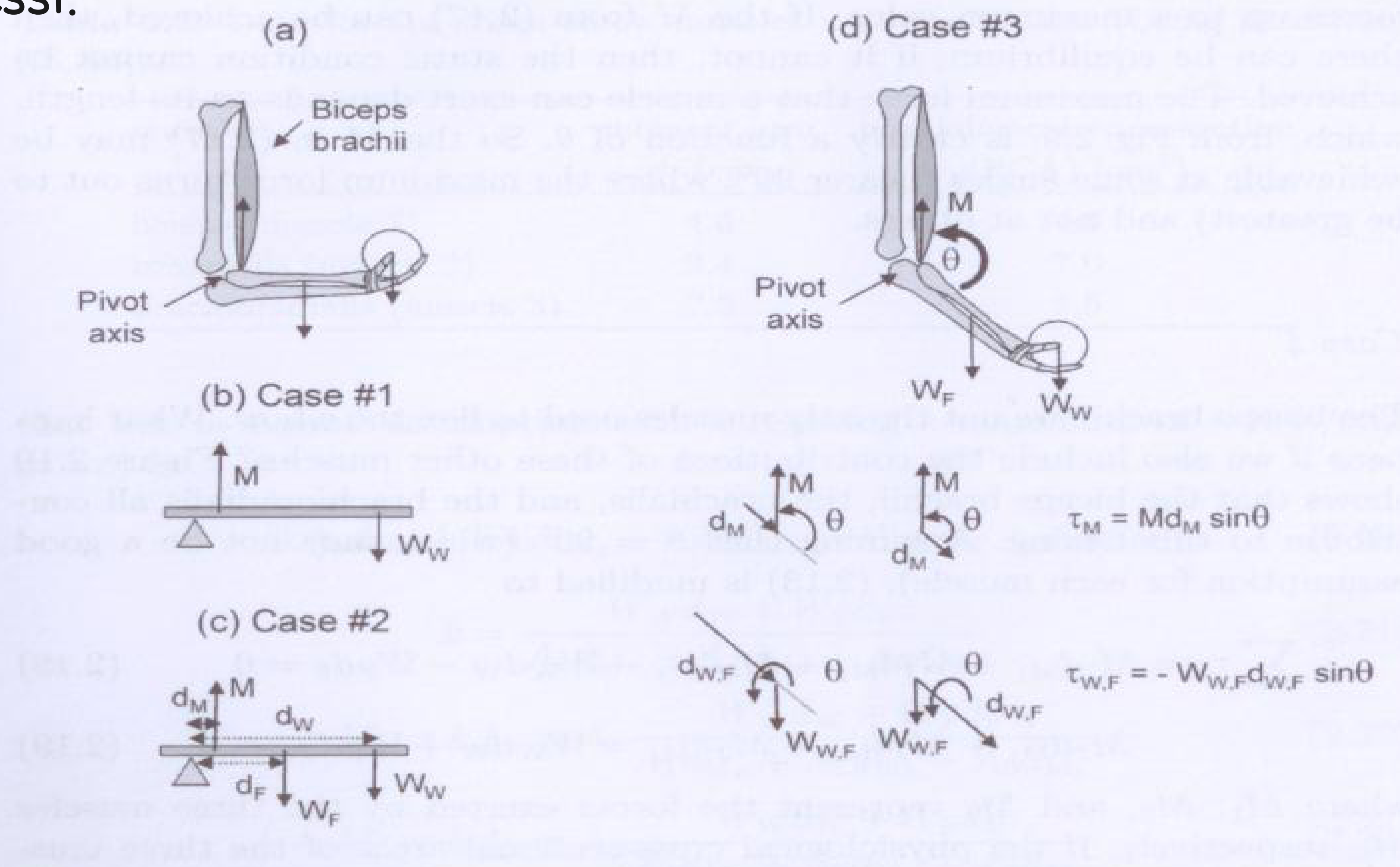


Fig. 2.9. (a) Weight held in the hand, showing the biceps brachii muscles. (b–d) Forces for the equilibrium of a weight held in the hand for Cases 1–3

Avambraccio: caso 1

Caso 1

Il bicipite si inserisce a circa 4 cm dall'asse pivot (fulcro, polo).
Supponiamo di tenere un peso, W, in mano.
La mano dista d_W=36 cm dal pivot.
Vogliamo calcolare la forza necessaria, M per avere equilibrio.

Dalla relazione di equilibrio si ricava $M=(d_W/d_M)W= 9W$.
Quindi per un peso di 100N il muscolo deve fornire una forza di 900N.
In questo calcolo abbiamo assunto:
- avambraccio e braccio superiore sono a 90°
- massa avambraccio e' trascurabile.

Avambraccio: caso 2

Caso 2

Rendiamo il modello piu' realistico includendo la massa dell'avambraccio W_F che e' circa $0.022W_b$. Per W_b=70kg=700N W_F=15N.

Figura 2.9 (c)

Supponiamo che il peso dell'avambraccio sia concentrato nel suo CM che assumiano in mezzo all'avambraccio, d_F=13cm dal pivot.

La relazione di equilibrio diventa:

$Md_M - W_W d_W - W_F d_F = 0 \Longrightarrow M = (d_W/d_M)W_W + (d_F/d_M)W_F = 9W_W + 3.25W_F$

Quindi per un peso W_W=100N

$M = 900 + 3.25 \cdot 15 = 950N$ e' la forza da applicare.

Abbiamo ancora l'assunzione che braccio e avambraccio formino un angolo di 90°

Avambraccio: caso 3

Caso 3

Oltre a includere la massa dell'avambraccio vediamo cosa accade se non assumiamo che braccio e avambraccio formino un angolo di 90°. Figura 2.9 (d).

Poniamo il braccio verticale e l'avambraccio che forma un angolo θ col braccio. Questo angolo al massimo puo' essere 142°.

La relazione di equilibrio diventa:

$M d_M \sin\theta - W_w d_W \sin\theta - W_f d_F \sin\theta = 0$ che riporta al caso precedente

$M d_M - W_w d_W - W_F d_F = 0$ quindi la forza da applicare non dipende da θ

$M = (d_W/d_M) W_W + (d_F/d_M) W_F = 9 W_W + 3.25 W_F$

Questo e' vero se si considera M costante. In realta' la forza muscolare dipende dalla lunghezza del muscolo e quindi da θ.

Per esempio c'e' un limite oltre il quale il muscolo si rompe.

La forza e' massima per angoli vicini a 90°.

Avambraccio: caso 4

Caso 4

Il muscolo bicipite non e' l'unico usato. La figura 2.10 mostra i tre muscoli piu' importanti che contribuiscono al movimento.

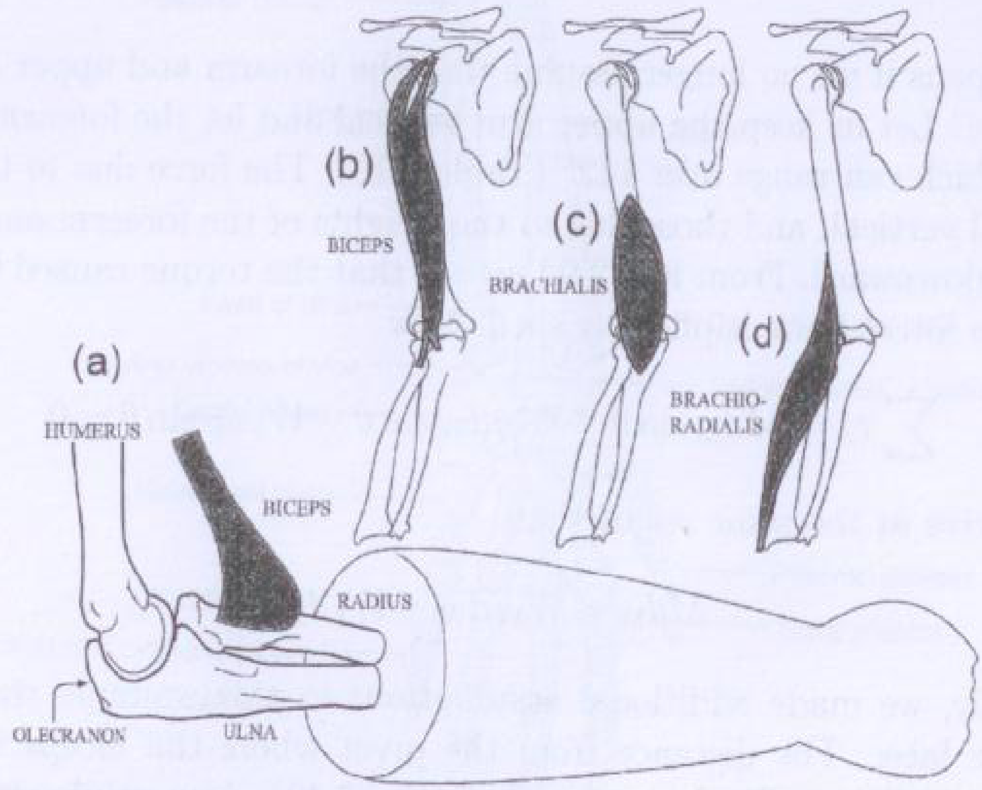


Fig. 2.10. Sketch of the elbow joint for analyzing the statics of the lower arm for Case 4, with the three muscles, the biceps (brachii), brachialis, and brachioradialis, shown in (**b**–**d**). (From [76])

Avambraccio: caso 4

Caso 4

Supponiamo che l'angolo tra ciascun muscolo e l'avabraccio sia di 90°, approssimazione che puo' non essere vera per tutti i muscoli.

La relazione di equilibrio diventa:

$$M_1 d_{M1} + M_2 d_{M2} + M_3 d_{M3} - W_W d_W - W_F d_F = 0$$

$$M_1 d_{M1} + M_2 d_{M2} + M_3 d_{M3} = W_W d_W + W_F d_F$$

dove M_1 , M_2 e M_3 sono le forze esercitate dai 3 muscoli.

Se indichiamo con A_1 , A_2 e A_3 la sezione trasversa fisiologica dei 3 muscoli, la forza esercitata da ciascun muscolo si puo' assumere proporzionale ad A: $M_i = kA_i$ $i=1,2,3$. Quindi sostituendo:

$$kA_1 d_{M1} + kA_2 d_{M2} + kA_3 d_{M3} = W_W d_W + W_F d_F \quad \text{da cui}$$

$$k = (W_W d_W + W_F d_F)/(A_1 d_{M1} + A_2 d_{M2} + A_3 d_{M3})$$

Avambraccio: caso 4 - continua

Quindi:

$M_1 = kA_1 = A_1(W_W d_W + W_F d_F)/(A_1 d_{M1} + A_2 d_{M2} + A_3 d_{M3})$

$M_2 = kA_2 = A_2(W_W d_W + W_F d_F)/(A_1 d_{M1} + A_2 d_{M2} + A_3 d_{M3})$

$M_3 = kA_3 = A_3(W_W d_W + W_F d_F)/(A_1 d_{M1} + A_2 d_{M2} + A_3 d_{M3})$

Usando i parametri di tabella:

Muscolo	Distanza da F, d_i(cm)	A(cm^2)
Bicipite (M_1)	4.6	4.6
Brachiale (M_2)	3.4	7.0
Brachioradiale (M_3)	7.5	1.5

W_W=700N, W_F=15N, d_W=36 e d_F=13cm si ottiene:

M_1 = 262N, M_2 =399N e M_3 =85N.

La forza totale e' 746N

Avambraccio: Conclusioni

Ma anche questo e' un modello e si sono fatte dele approssimazioni. Per esempio k uguale per tutti i muscoli. Nella realta' $M_i=k_iA_i$ i=1,2,3, cioe' anche la costante varia da muscolo a muscolo. In questo caso il problema non si puo' risolvere con semplici conti, occorre qualche strumento in piu'.

Passando da modelli semplici a modelli piu' complessi ci si avvicina a una descrizione piu' accurata della realta'.

Anca: Introduzione

L'anca non e' costituita da un unico osso ma bensi' da molte ossa fuse assieme. Figure 2.11 e 2.13.
L'acetabolo e' la cavita' dove si attacca il femore,
dove abbiamo l'articolazione. La testa del femore e' tenuta dai muscoli adduttori dell'anca attaccati al grande troncantere.

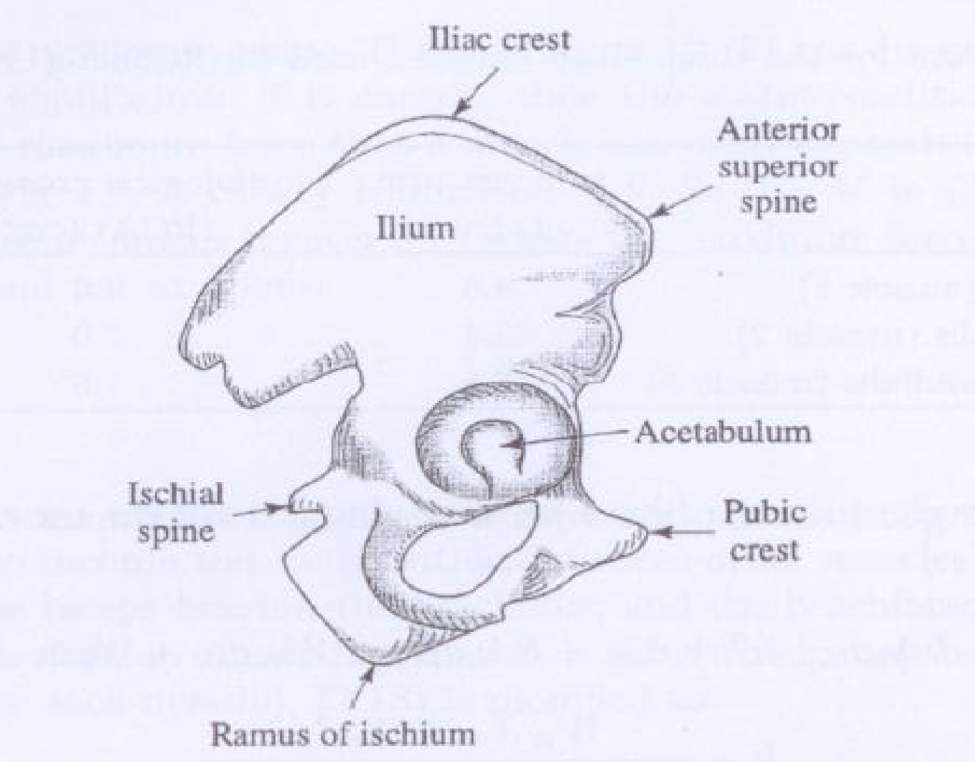


Fig. 2.11. Right hip bone in adult. (From [65])

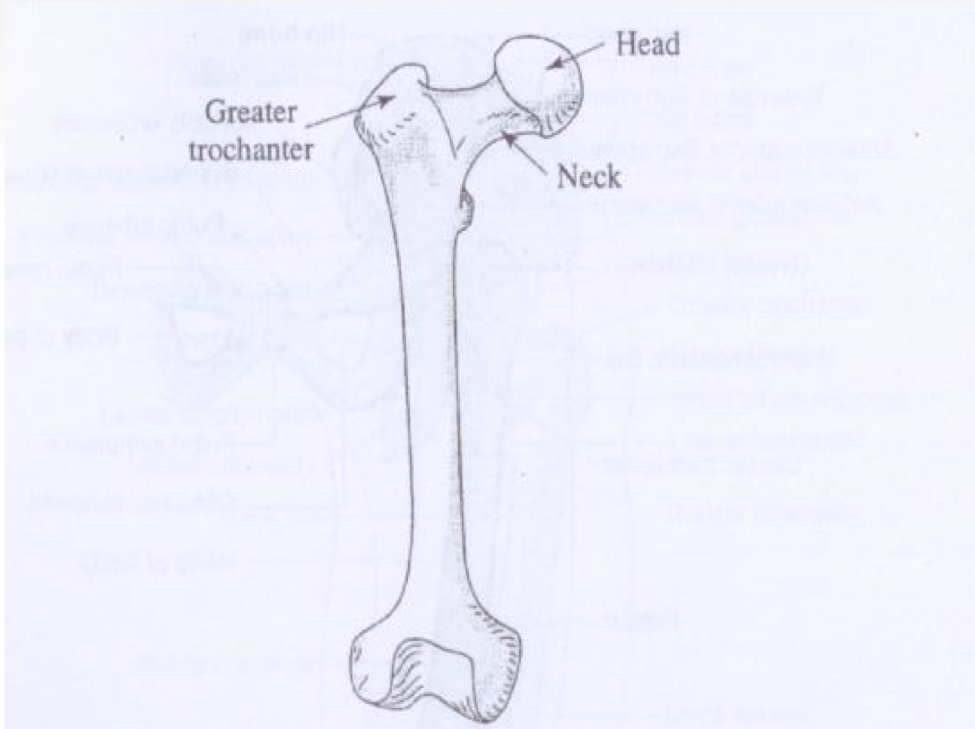


Fig. 2.13. Anterior view of right femur. (From [65])

Anca: Studio dell'equilibrio

Vogliamo determinare la forza di reazione sulla testa del femore e la forza dei muscoli adduttori dell'anca per un individuo che sta in piedi su una gamba sola.
Questo risulta essere un buon modello della camminata lenta.

Separiamo il problema in due fasi:
- analizziamo le forze di tutto il corpo;
- trattiamo la gamba come un corpo rigido che interagisce col corpo tramite l'anca.

Equilibrio dell'intero corpo

Consideriamo il corpo di figura 2.16, in piedi su una gamba sola.

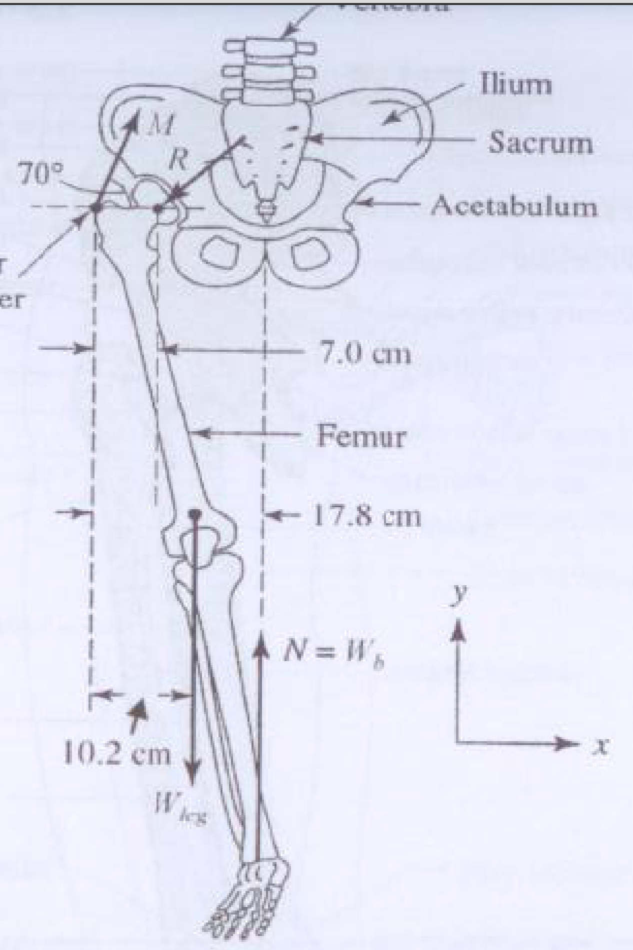


Fig. 2.16. Anatomical diagram of the leg and hip for someone standing on one leg, or during slow walking, showing the forces on them and relevant dimensions, including the force exerted on the head of the femur by the acetabulum R and the net force exerted by the hip abductor muscles. (From [65])

Equilibrio dell'intero corpo - 2

Ci sono due forze:
- peso del corpo $\vec{W}_b$ diretto verso il basso applicato nel CM del corpo che si trova sulla linea mediana nell'anca
- Reazione del pavimento, $\vec{N}$, applicata al piede.

Non ci sono forze lungo x e le forze lungo y si bilanciano $\vec{W}_b=\vec{N}$

Il corpo non ruota perche' il momento delle forze e' nullo. Infatti se il piede e' direttamente sotto l'anca e prendiamo come polo rispetto a cui calcoliamo i momenti il CM il momento della forza peso $\vec{W}_b$ e' nullo perche' ha braccio nullo, il momento della reazione, $\vec{N}$, e' nullo perche' $\vec{N}$ e' parallela all'asse, cioe' angolo tra forza e braccio e' 180°

Equilibrio della singola componente: gamba

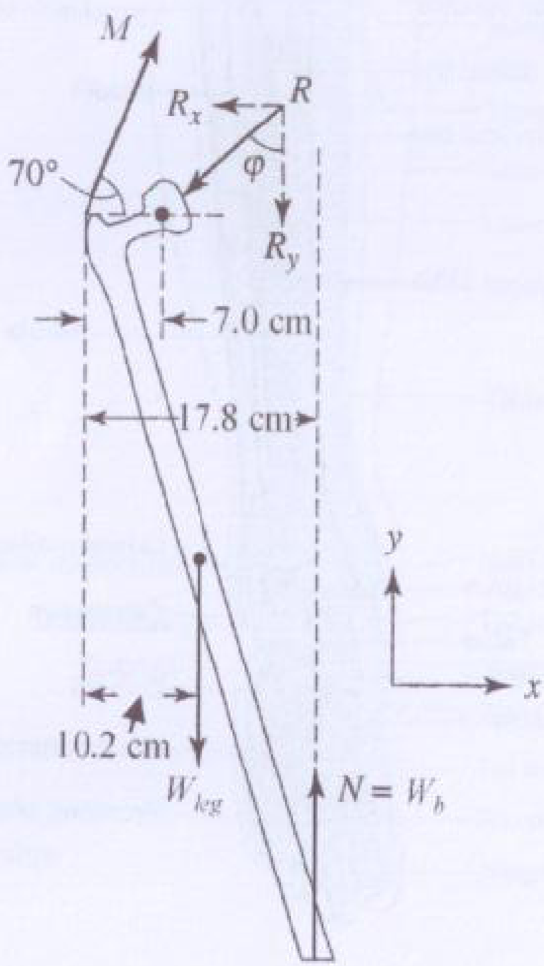


Fig. 2.17. Force diagram for a leg for someone standing on one foot, using Fig. 2.16. (From [65])

La figura 2.17 schematizza gamba con le forze esterne.

Equilibrio della gamba: forze e momenti

Abbiamo 4 forze esterne:

1. $\vec{N}$ la reazione del piano, $\vec{N}=\vec{W}_b$
2. $\vec{W}_{leg}$ con $W_{leg}= 0.16W_b$ peso della gamba, applicato nel CM della gamba
3. $\vec{R}$ reazione dell'anca alla forza e momento esercitati dalla gamba
4. $\vec{M}$ forza dovuta ai muscoli adduttori dell'anca. I muscoli coinvoltisono molti ma consideriamo una unica struttura rappresentata dal vettore $\vec{M}$ che forma un angolo di 70° con l'orizzontale applicato al grande trocantere.

La prima condizione di equilibrio ci da':

$$\sum F_x = M\cos(70^o) - R_x = 0$$

$$W_{leg}$$

$$\sum F_y = M\sin(70^o) - R_y - 0.16W_b + W_b = 0$$

Equilibrio della gamba: forze e momenti - 2

Seconda condizione di equilibrio:

- prendiamo come asse rispetto a cui calcolare i momenti delle forze quello che passa dal centro della testa del femore, in questo modo la reazione $\vec{R}$ ha momento nullo .

Dalle distanze riportate in fig. 2.17 ricaviamo:

a. la componente ortogonale all'asse della distanza di $\vec{N}$ dall'asse e' 10.8 cm e da' momento positivo

b. la componente ortogonale all'asse della distanza di $\vec{W}_{leg}$ dall'asse e' 3.2 cm e da' momento negativo

c. momento di $\vec{R}$=0

d. momento della forza degli adduttori, $\vec{M}$, e' negativo, e vale -(7.0)Msin(70°)

Calcolo del momento delle forze

asse rispetto a cui
si calcolano i momenti

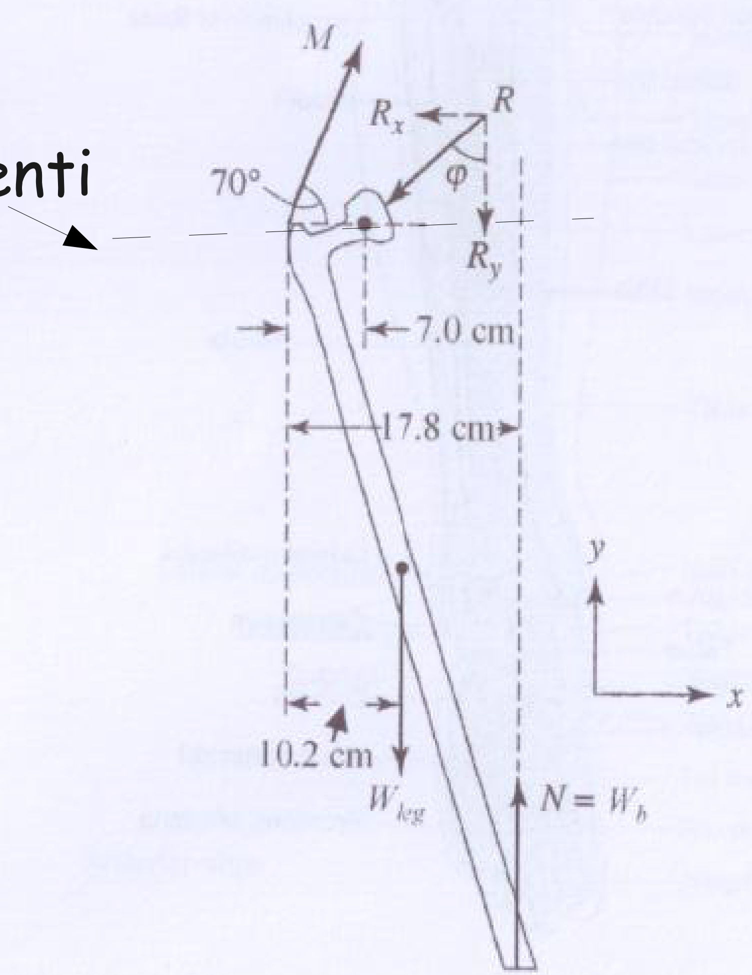


Fig. 2.17. Force diagram for a leg for someone standing on one foot, using Fig. 2.16. (From [65])

Equilibrio della gamba: equazioni finali

Riassumendo, la somma dei momenti:

$$\sum \tau_z = 10.8\mathrm{W}_b - 3.2(0.16\mathrm{W}_b) - 7.0\mathrm{M}\sin 70^o = 0$$ da cui si ricava

$$M = \frac{10.8 - 0.5}{7.0\sin 70^o} W_b = 1.57\mathrm{W}_b$$

Notare che: $M > W_b$

Sostituendo nelle altre equazioni si ricava:

$$R_x = M\cos(70^o) = 0.54\mathrm{W}_b \qquad R_y = M\sin(70^o) + 0.84\mathrm{W}_b = 2.31\mathrm{W}_b$$

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = 2.37\mathrm{W}_b \qquad \tan(\varphi) = \frac{R_x}{R_y} = \frac{0.54}{2.31} = 0.23 \quad \rightarrow \quad \varphi = 13^o$$

Se m_b=90kg → W_b=880N e quindi M=1400N e R=2100N

Il problema dell'anca e' chiaro: la reazione dell'anca $\vec{R}$ e' molto maggiore del peso del corpo.

Anca: valutazioni conclusive

Sarebbe interessante valutare la reazione $\vec{R}$ nei casi:

- camminata con aiuto di un bastone, cioe' valutare equilibrio del corpo rigido gamba+bastone
- camminata con un oggetto pesante in mano

L'applicazione di reazioni $\vec{R}$ "grandi" per periodi lunghi ha l'effetto di assottigliare la cartilagine e causare altri danni anche piu' gravi. Questo porta a dolore mentre si cammina e col tempo alla sostituzione dell'anca.

Ginocchio

Il ginocchio e' una giuntura piuttosto complessa, formata in realta' da 2 giunture: giuntura tibiofemorale tra tibia e femore e la giuntura patellofemorale tra rotula e femore.

Semplifichiamo molto e la rappresentiamo come un corpo rigido.

Lo scopo e' trovare la forza esercitata dai quadricipiti e la reazione della giuntura.

Facciamo questo esercizio nel caso in cui la persona sia sedutae abbia un peso sulla caviglia.

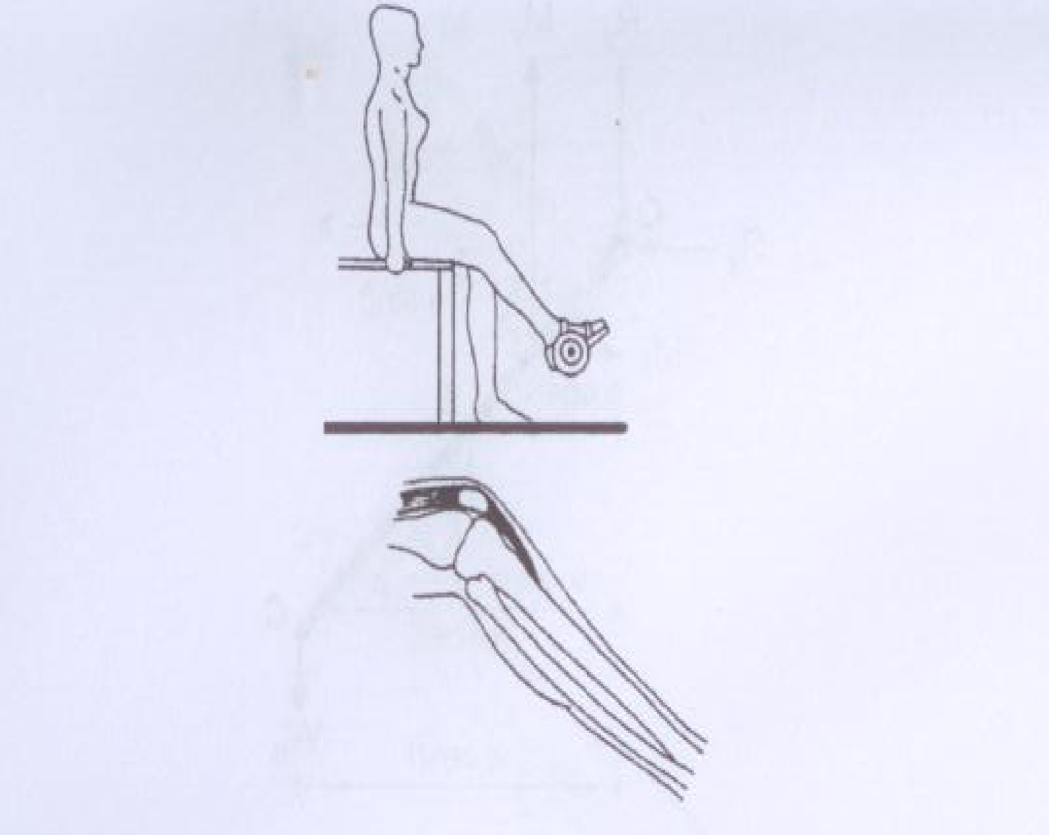


Fig. 2.22. Exercising muscles near and at the knee. (From [86])

Ginocchio: forze

Le forze che agiscono sono:

1. $\vec{M}_o$: forza peso dovuta all'oggetto sulla caviglia
2. $\vec{M}_1$: forza peso dovuta alla gamba
3. $\vec{M}$: forza esercitata dai quadricipidi e trasmessa dai tendini della rotula
4. $\vec{R}$: reazione della giuntura

β e' l'angolo tra gamba e orizzontale.

θ e' angolo tra $\vec{M}$ e gamba

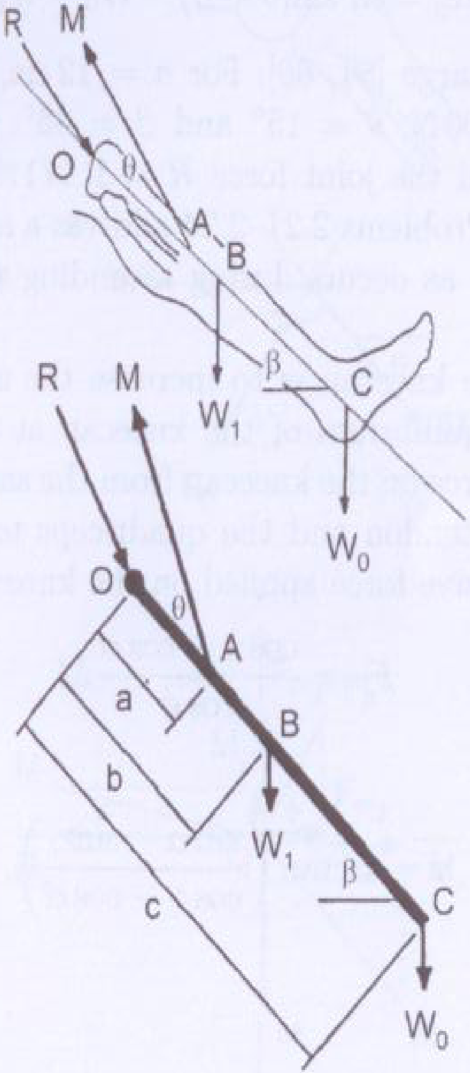


Fig. 2.23. Forces on the lower leg, while exercising the muscle around the knee. (From [86])

Ginocchio: schema e numeri

a= distanza tra O e A (appl. $\vec{M}$)

b= distanza tra O e B (CM, Appl. di W_1)

c= distanza tra O e C (caviglia)

Parametro	Valore
a	12 cm
b	22 cm
c	50 cm
W_1	150 N
W_0	100 N
θ	15°
β	45°

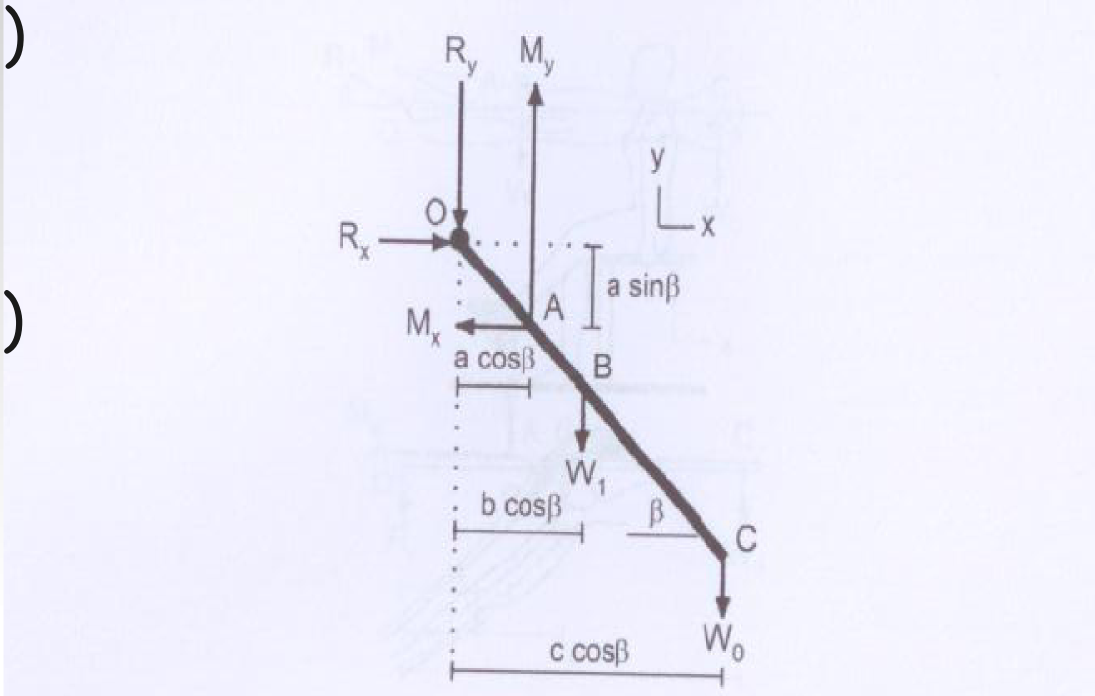


Fig. 2.24. Resolution of the forces on the lower leg in Fig. 2.23. (From [86])

Ginocchio: equilibrio di forze e momenti

All'equilibrio:

$$\sum F_x = -M_x + R_x = 0$$

$$\sum F_y = -R_y + M_y - W_1 - W_o = 0$$

Somma delle forze=0

$$\sum \tau_z = aM\sin(\vartheta) - bW_1\cos(\beta) - cW_o\cos(\beta) = 0$$

Somma dei momenti =0

Da cui si ricava:

$$M = \frac{(bW_1 + cW_o)\cos(\beta)}{a\sin(\vartheta)}$$

Dalle prime due equazioni e dalla geometria del problema:

$$R_x = M\cos(\vartheta + \beta)$$

$$R_y = M\sin(\vartheta + \beta) - W_1 - W_o$$

Inserendo i numeri presentati a pag.25 si ottiene:

$M = 1381\,N$ $\qquad$ $R = 1171\,N$

Caviglia

Esaminiamo adesso l'equilibrio della caviglia quando una persona sta in piedi su un piede solo sulle dita.

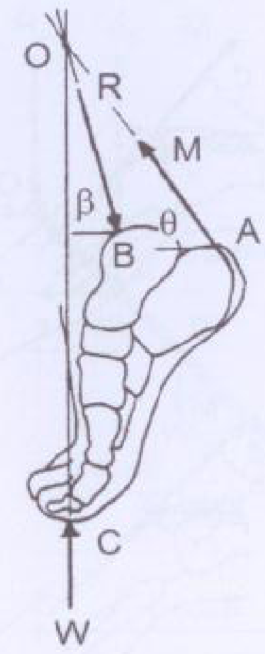


Fig. 2.27. Force diagram of the foot on tiptoe, showing that they form a concurrent system. (From [86])

Le forze che agiscono sono:

$\vec{W}$: reazione del pavimento, uguale alla forza peso del corpo

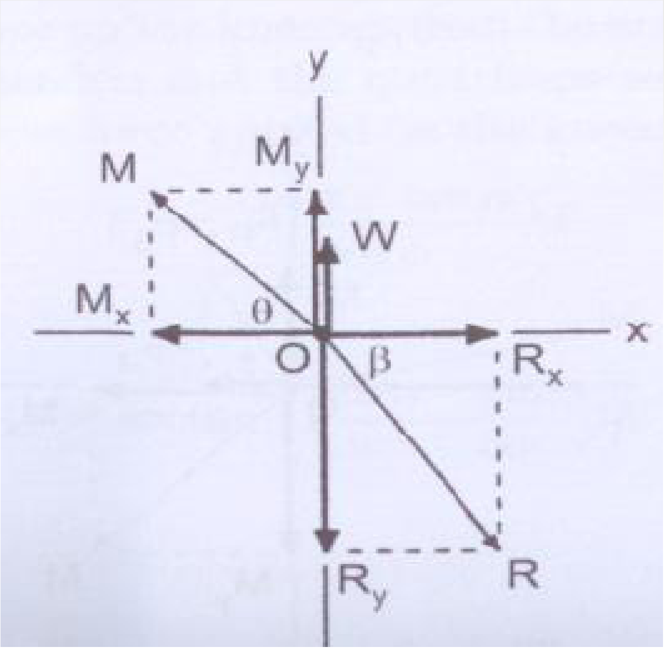
$\vec{M}$: forza muscolare trasmessa dal tendine di Achille

$\vec{R}$: reazione sul tallone

Caviglia: equilibrio di forze e momenti

$$\sum F_x = -M_x + R_x = 0$$
$$\sum F_y = M_y - R_y + W = 0$$

Risultante delle forze=0



θ: angolo tra $\vec{M}$ e orizzontale

β: angolo tra $\vec{R}$ e orizzontale

$$-M\cos(\vartheta) + R\sin(\beta) = 0$$

$$M\sin(\vartheta) - R\cos(\beta) + W = 0$$

Caviglia: equilibrio di forze e momenti

Dalla prima si ricava: $M = R\dfrac{\sin(\beta)}{\cos(\vartheta)}$

Che sostituiamo nella seconda

$$R\frac{\sin(\beta)}{\cos(\vartheta)}\sin(\vartheta) - R\cos(\beta) + W = 0$$

$$R\sin(\beta)\sin(\vartheta) - R\cos(\beta)\cos(\vartheta) + W\cos(\vartheta) = 0 \qquad R\cos(\beta+\vartheta) = W\cos(\vartheta)$$

Da cui:

$$R = W\frac{\cos(\vartheta)}{\cos(\beta+\vartheta)} \qquad M = W\frac{\cos(\beta)}{\cos(\beta+\vartheta)}$$

Se β=60° e θ=45°

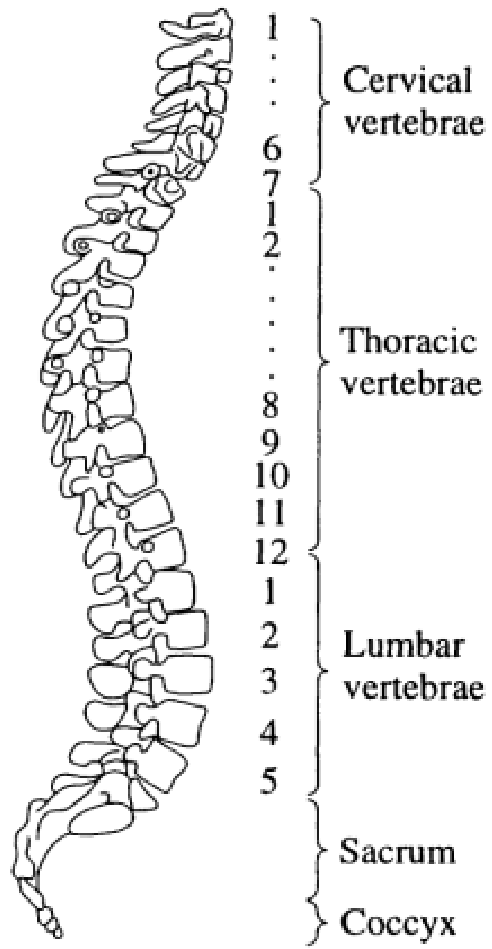
$M = 1.93W_b$ $\qquad$ $R = 2.73W_b$

Valori ben piu' grandi del peso corporeo.

La schiena

Circa 80% della popolazione soffre, prima o poi, di mal di schiena. Cerchiamo di capire l'origine delle forze che agiscono sui dischi che si trovano tra le vertebre.

Esaminiamo le forze che agiscono tra le vertebre quando il corpo e' in posizioni semplici, come per esempio quando ci pieghiamo o solleviamo qualcosa.

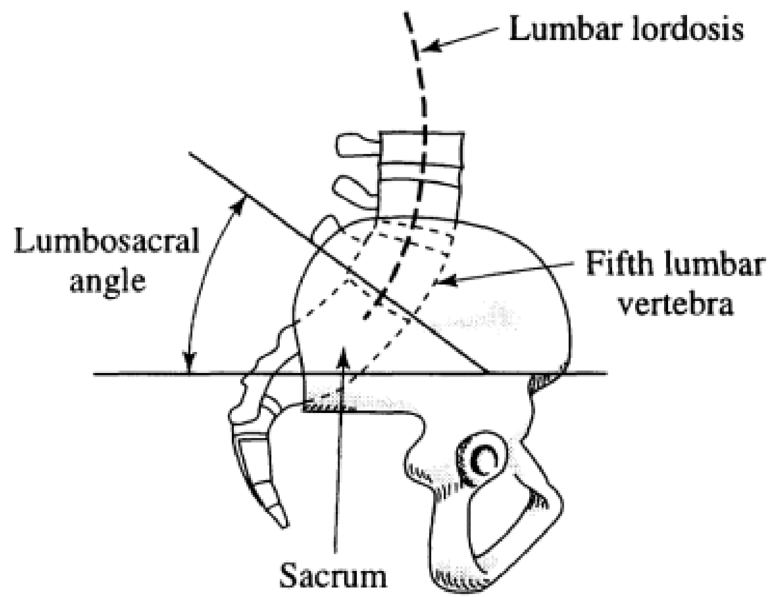


La spina dorsale non e' dritta:

- curvatura primaria, vertebre toraciche e sacrali (posizione fetale)
- curvatura secondaria, vertebre lombari e cervicali

Il problema della schiena

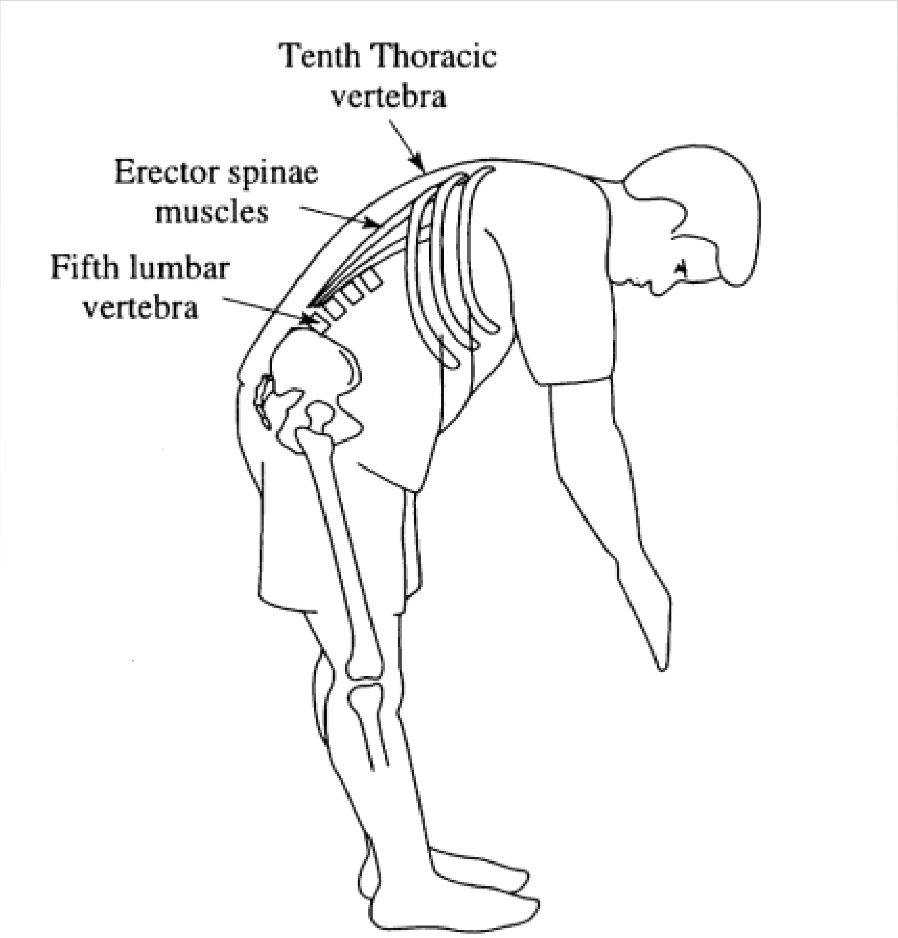
In figura e' mostrato l'angolo tra la quinta vertebra lombare e il sacro.
Quando l'angolo e' diverso da ~30° si genera dolore.



Usiamo come modello di spina dorsale una asta rigida con forze applicate in punti specifici.
Ovviamente per una descrizione piu' accurata ci sarebbe bisogno di un modello piu' raffinato.

Modello della schiena

1. L'insieme dei muscoli posteriori che vanno dalla cresta iliaca al cranio sono modellati da un singolo muscolo inserito a 1/3 dal centro di massa della testa e braccia ad un angolo di 12° rispetto alla spina dorsale.
2. Assumiamo che la spina dorsale formi un angolo θ con l'orizzontale. Prendiamo θ=30° che rappresenta un grande piegamento.
3. La cerniera e' al disco lombosacrale , sotto la quinta vertebra sacrale e il sacro.



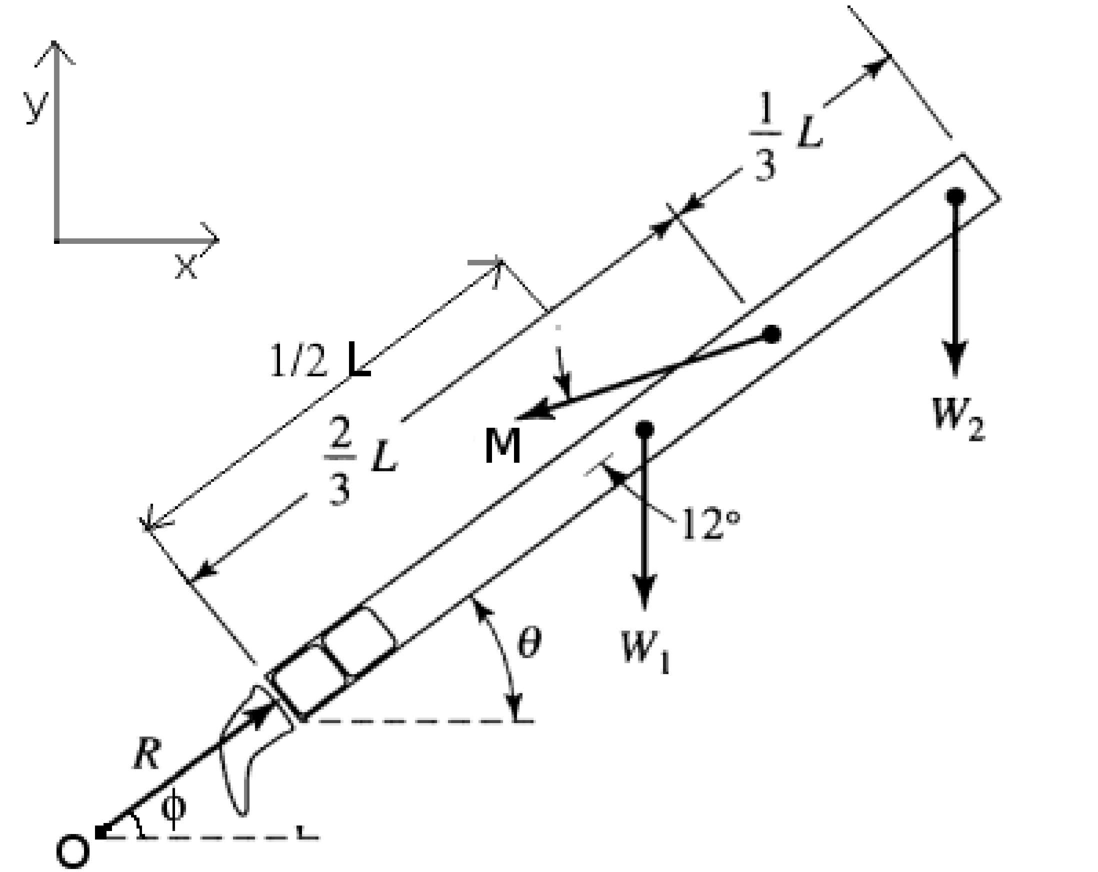
La schiena come corpo rigido

Prendiamo come polo rispetto a cui calcolare i momenti O e il sistema di riferimento come in figura.

Le forze che agiscono sono:

- $\vec{R}$: reazione dal sacro
- $\vec{W}_1$: peso del tronco
- $\vec{W}_2$: peso delle braccia, della testa e un eventuale peso in mano
- $\vec{M}$: forza muscolare

$\theta = 30°$



La schiena: equilibrio di forze e momenti

$$\sum F_x = R_x - M\cos(18) = 0$$

$$\sum F_y = R_y - M_y \sin(18) - W_1 - W_2 = 0$$

$$\sum \tau_z = \frac{2L}{3} M\sin(12) - \frac{L}{2} W_1 \cos(30) - LW_2 \cos(30) = 0$$

Assumiamo:

$W_1 = 0.4W_b$ $W_2 = 0.2W_b$

$M = 2.5\mathrm{W}_b$, $R_x = 2.38\mathrm{W}_b$, $R_y = 1.37\mathrm{W}_b$, $\varphi = \arctan(R_y / R_x) = 30^o$, $R = 2.74\mathrm{W}_b$

Con W_b=880 N (massa di 90 kg):

M=2200N e R=2400N

Se raddoppiamo $W_2=0.4W_b$ (massa aggiuntiva di 18kg) si ha:

$M = 3.74\mathrm{W}_b = 3300\mathrm{N}$ $R = 4.07\mathrm{W}_b = 3600\mathrm{N}$

La schiena: conclusioni

La forza muscolare e la reazione sulla parte bassa della spina dorsale sono molto piu' grandi del peso corporeo. La reazione R spinge verso l'alto per bilanciare le forze che spingono verso il basso.

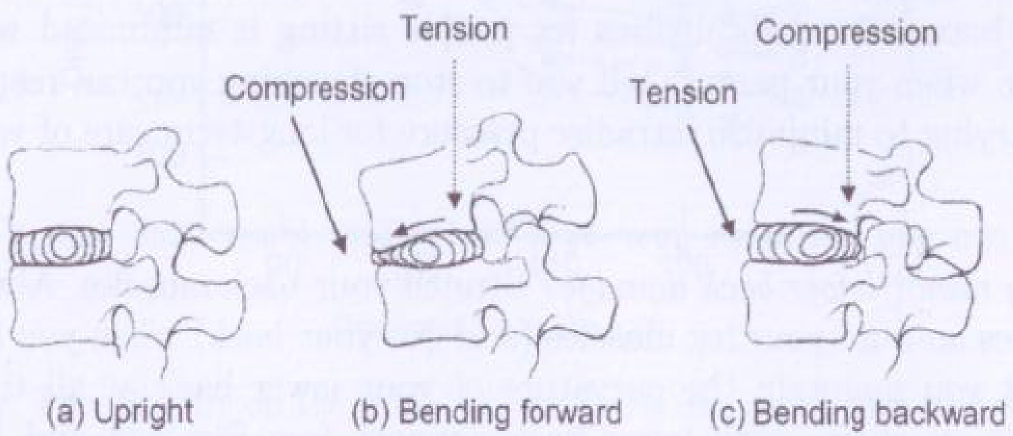


Fig. 2.42. Disc compression for a person who is (**a**) vertical, (**b**) bending forward, and (**c**) bending backward. Bending forward leads to disc compression anteriorly and tension posteriorly, bulging on the compressive side, and the shifting of the disc nucleus posteriorly. (From [88])

Se ne deduce:

- non dobbiamo piegarci per sollevare oggetti, specie se pesanti
- mantenere la curvatura il piu' possibile vicina al suo valore naturale per alleviare l'effetto di R.