Soluzione degli esercizi sul moto parabolico

Esercizio 1. *Un ragazzo lancia un pallone orizzontalmente da un tetto con una velocità iniziale di* 15 m/s*; sapendo che atterra a* 20 m *dalla base della casa, si determini: a) il tempo di volo; b) l'altezza dell'edificio.*

Soluzione. a) In generale, la legge oraria è

$$\begin{cases} x = x_o + v_{o,x}\, t \\ y = y_o + v_{o,y}\, t - \dfrac{1}{2}\, g\, t^2 \end{cases} \tag{1}$$

indicata con h l'altezza dell'edificio, tenendo conto che $v_{o,x} = 15\ m/s$ e $v_{o,y} = 0\ m/s$, abbiamo

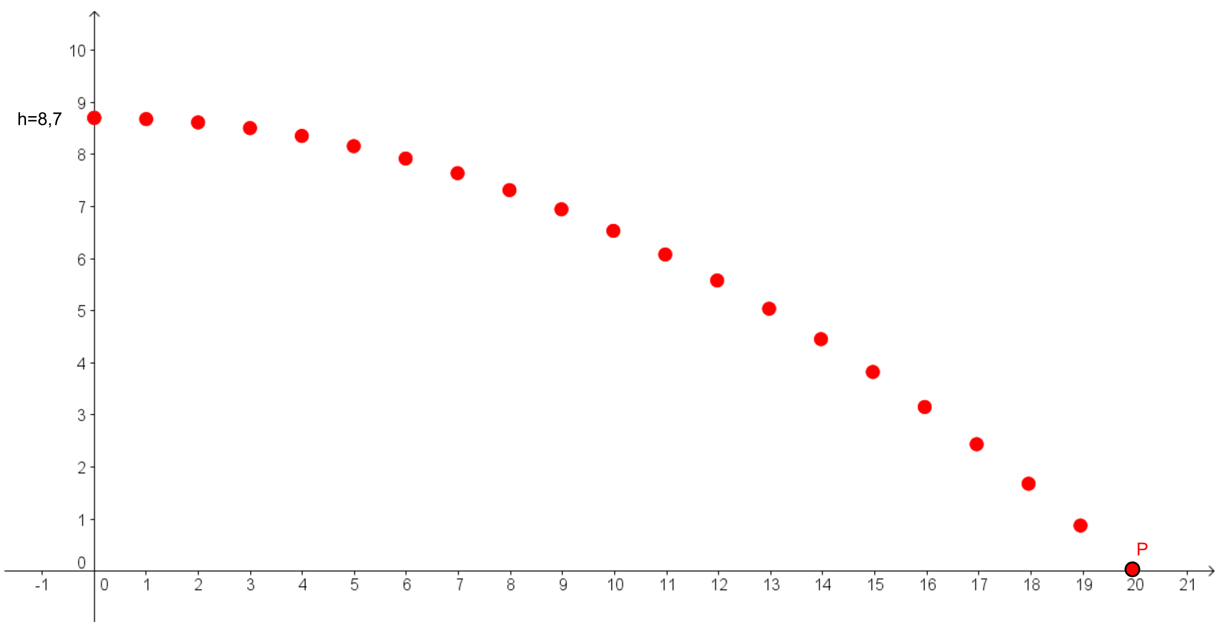
$$\begin{cases} x = 15\, t \\ y = h - 4,9\, t^2 \end{cases} ;$$

il pallone cade a 20 m dalla base dell'edificio per cui dalla prima equazione si ricava

$$15\, t = 20 \quad \Rightarrow \quad t \approx 1,33\ s\ .$$

b) Per determinare h è sufficiente sostituire il valore trovato al punto a) nella seconda equazione:

$$0 = h - 4,9 \cdot (1,33)^2 \quad \Rightarrow \quad h \approx 8,7\ m\ .$$



Esercizio 2. *Un tuffatore di Acapulco si lancia orizzontalmente da un'altezza di* 35 m*; sapendo che ci sono scogli per* 5 m *dalla base della piattaforma, determinare:*
a) il tempo di volo; b) la velocità minima che gli permette di evitare gli scogli.

Soluzione. a) Indicata con v_o la velocità iniziale del tuffatore, dalla formula (1) abbiamo

$$\begin{cases} x = v_o\, t \\ y = 35 - 4,9\, t^2 \end{cases}$$

il tempo di volo si trova risolvendo l'equazione

$$0 = 35 - 4,9 \cdot t^2 \quad \Rightarrow \quad t \approx 2,67\ s\ .$$

b) Per evitare gli scogli deve risultare

$$v_o \cdot (2,67\ s) > 5\ m \quad \Rightarrow \quad v_o > 1,87\ m/s\ .$$

Esercizio 3. *Un pallone viene calciato con un angolo $\theta = 30°$ dalla sommità di un palazzo alto 32 m. Sapendo che la velocità iniziale è di 10 m/s, si determini:*
a) l'altezza massima raggiunta; b) il tempo di volo; c) la gittata del pallone, misurata a partire dalla base del palazzo; d) la velocità con cui giunge a terra.

Soluzione. La velocità iniziale è

$$\begin{cases} v_{o,x} = \|\overrightarrow{v_o}\| \cdot \cos\theta \\ v_{o,y} = \|\overrightarrow{v_o}\| \cdot \sin\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_{o,x} = (10\ m/s) \cdot \cos 30° \\ v_{o,y} = (10\ m/s) \cdot \sin 30° \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_{o,x} = 8,66\ m/s \\ v_{o,y} = 5\ m/s \end{cases} .$$

La legge oraria del pallone è

$$\begin{cases} x = 8,66\, t \\ y = 32 + 5\, t - 4,9\, t^2 \end{cases} .$$

La velocità del pallone all'istante generico t è

$$\begin{cases} v_x = 8,66\ m/s \\ v_y = 5\ m/s - (9,8\ m/s^2) \cdot t \end{cases} .$$

a) Primo metodo. L'altezza massima raggiunta y_{max} è

$$(0\ m/s)^2 - (5\ m/s)^2 = 2 \cdot (-9,8\ m/s^2) \cdot (y_{max} - 32\ m) \quad \Rightarrow \quad y_{max} \approx 33,28\ m\ .$$

Secondo metodo. Il pallone raggiunge la massima altezza quando la componente y della velocità si annulla:

$$v_y = 0\ m/s \quad \Rightarrow \quad 5\ m/s - (9,8\ m/s^2) \cdot t = 0\ m/s \quad \Rightarrow \quad t \approx 0,51\ s\ ;$$

sostituendo il valore appena calcolato nell'espressione di y si trova l'altezza massima raggiunta:

$$y_{max} = 32\ m + (5\ m/s) \cdot (0,51\ s) - (4,9\ m/s^2) \cdot (0,51\ s)^2 \approx 33,28\ m\ .$$

Terzo metodo. L'equazione cartesiana della traiettoria parabolica è

$$y = h + \frac{v_{o,y}}{v_{o,x}}\, x - \frac{g}{2\, v_{o,x}^2}\, x^2 \tag{2}$$

sostituendo i dati otteniamo

$$y = 32 + 0,577\, x - 0,0653\, x^2\ ;$$

l'altezza massima coincide con l'ordinata del vertice della parabola:

$$y_{max} = \frac{-(0,577)^2 + 4 \cdot (-0,0653) \cdot (32)}{4 \cdot (-0,0653)} \approx 33,28\ m\ .$$

b) Calcoliamo il tempo di volo:

$$0 = 32 + 5\, t - 4,9\, t^2 \quad \Rightarrow \quad t \approx 3,12\ s\ .$$

c) La gittata del pallone è

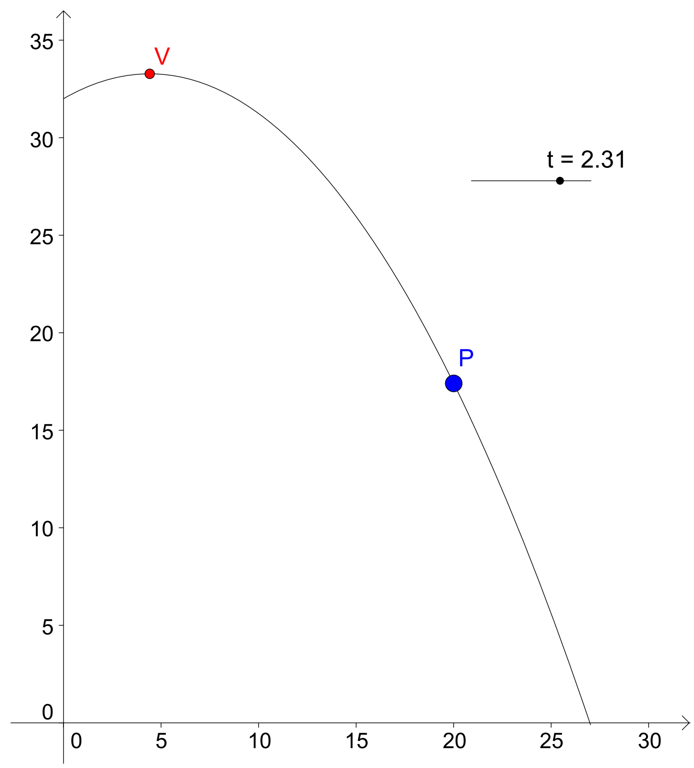
$$x = 8,66\ m/s \cdot (3,12\ s) \approx 27,02\ m\ .$$

d) La velocità all'istante $t \approx 3,12\ s$ è

$$\begin{cases} v_x = 8,66\ m/s \\ v_y = 5\ m/s - (9,8\ m/s^2) \cdot (3,12\ s) \approx -25,58\ m/s \end{cases} ;$$

il modulo della velocità è $v = \sqrt{(8,66\ m/s)^2 + (-25,58\ m/s)^2} \approx 27,01\ m/s$.

Nella figura qui sotto possiamo vedere la posizione del vertice V della traiettoria parabolica e la posizione del pallone all'istante $t = 2,31\ s$:



Esercizio 4. *Alle olimpiadi un atleta lancia il peso con un angolo di* $40°$ *rispetto all'orizzonte; sapendo che il peso lascia la mano dell'atleta ad un'altezza di* $230\ cm$*, si dica qual è la velocità iniziale minima che permette di battere il record (risalente al 1990) di Randy Barnes (USA):* $23,12\ m$*.*

Soluzione. Primo metodo. Ponendo $v_o = \|\overrightarrow{v_o}\|$ la legge oraria è

$$\begin{cases} x = v_o \cdot \cos(40°)\, t \\ y = 2,3 + v_o \cdot \sin(40°)\, t - 4,9\, t^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = v_o \cdot 0,766\, t \\ y = 2,3 + v_o \cdot 0,643\, t - 4,9\, t^2 \end{cases}$$

ponendo $x = 23,12\ m$, abbiamo

$$23,12 = v_o \cdot 0,766\, t \quad \Rightarrow \quad t \approx \frac{30,183}{v_o} ;$$

sostituendo questa espressione nell'altra equazione dove poniamo $y = 0$, si trova:

$$0 = 2,3 + v_o \cdot 0,643 \cdot \left(\frac{30,183}{v_o}\right) - 4,9 \cdot \left(\frac{30,183}{v_o}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad 0 = 21,708 - 4,9 \cdot \left(\frac{30,183}{v_o}\right)^2$$

risolvendo rispetto a v_o si ottiene

$$v_o \approx 14,34\ m/s\ .$$

Secondo metodo. L'equazione della parabola è

$$y = 2,3 + \tan(40°)\, x - \frac{4,9}{[v_o \cdot \cos(40°)]^2}\, x^2 \; ;$$

poiché deve passare dal punto di coordinate $(23,12\,;\,0)$, abbiamo:

$$0 = 2,3 + \tan(40°) \cdot (23,12) - \frac{4,9}{[v_o \cdot \cos(40°)]^2} \cdot (23,12)^2$$

risolvendo rispetto a v_o ritroviamo lo stesso risultato visto con il primo metodo: $v_o \approx 14,34\; m/s$.

Esercizio 5. *Guglielmo Tell deve colpire la mela posta sulla testa di suo figlio Gualtierino a una distanza di* 25 *m. Tenendo conto del fatto che la velocità iniziale della freccia è di* 38 *m/s e che, se mira direttamente alla mela, la freccia è orizzontale, a quale angolo deve inclinare la balestra per colpire la mela?*

Soluzione. La gittata orizzontale, in generale, è

$$G = \frac{2 \cdot v_{o,x} \cdot v_{o,y}}{g} \; ; \tag{3}$$

nel nostro caso abbiamo $G = 25\; m$, quindi

$$25\; m = \frac{2 \cdot v_{o,x} \cdot v_{o,y}}{9,8\; m/s^2} \quad \Rightarrow \quad 25\; m = \frac{((38\; m/s)\; \cos\theta) \cdot ((38\; m/s)\; \sin\theta)}{4,9\; m/s^2}$$

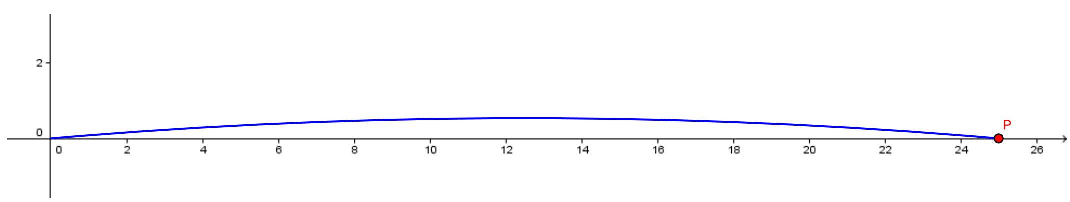
tenendo conto del fatto che $\sin\theta \cdot \cos\theta = \frac{1}{2}\, \sin(2\,\theta)$, si ha

$$25\; m = \frac{(38^2\; m^2/s^2) \cdot \frac{1}{2} \cdot \sin(2\,\theta)}{4,9\; m/s^2}$$

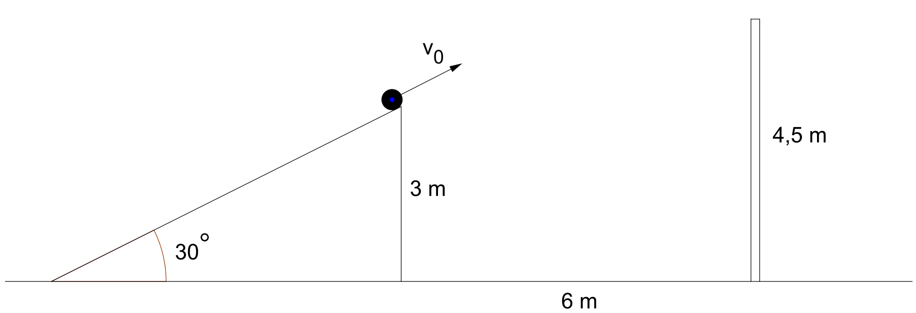
risolvendo rispetto a θ si trovano questi due valori:

$$\theta_1 = 4,88° \;\; ; \;\; \theta_2 = 85,12° \; ;$$

ovviamente la soluzione dell'esercizio è $\theta = 4,88°$. La freccia colpisce la mela dopo circa $0,66\; s$.



Esercizio 6. *Facendo riferimento alla figura, qual è la velocità minima che permette alla palla di scavalcare il muro alto* 4,5 *m?*



Soluzione. Primo metodo. Ponendo $v_o = \|\overrightarrow{v_o}\|$ la legge oraria è

$$\begin{cases} x = v_o \cdot \cos(30°)\, t \\ y = 3 + v_o \cdot \sin(30°)\, t - 4,9\, t^2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = v_o \cdot 0,866\, t \\ y = 3 + v_o \cdot 0,5\, t - 4,9\, t^2 \end{cases}$$

ponendo $x = 6\ m$, abbiamo $t = \dfrac{6}{v_o \cdot 0,866}$; sostituendo questa espressione nell'altra equazione dove poniamo $y = 4,5$, si trova:

$$4,5 = 3 + v_o \cdot 0,5 \cdot \left(\frac{6}{v_o \cdot 0,866}\right) - 4,9 \cdot \left(\frac{6}{v_o \cdot 0,866}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad 4,5 = 6,464 - 4,9 \cdot \left(\frac{6}{v_o \cdot 0,866}\right)^2$$

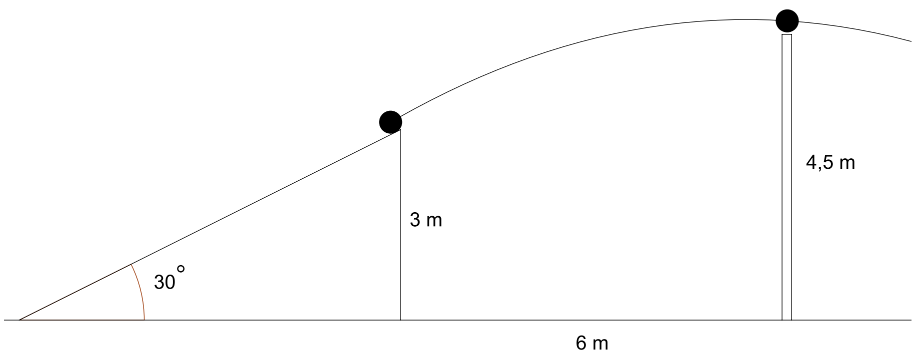
risolvendo rispetto a v_o si trova $v_o \approx 10,95\ m/s$.

Secondo metodo. L'equazione della traiettoria è

$$y = 3 + \tan(30°)\, x - \frac{4,9}{[v_o \cdot \cos(30°)]^2}\, x^2$$

con la velocità minima per scavalcare il muro, la parabola deve passare per il punto di coordinate $(6\,;\,4,5)$:

$$4,5 = 3 + 0,577 \cdot 6 - \frac{4,9}{(v_o \cdot 0,866)^2}\,(6)^2 \quad \Rightarrow \quad v_o \approx 10,95\ m/s\ .$$

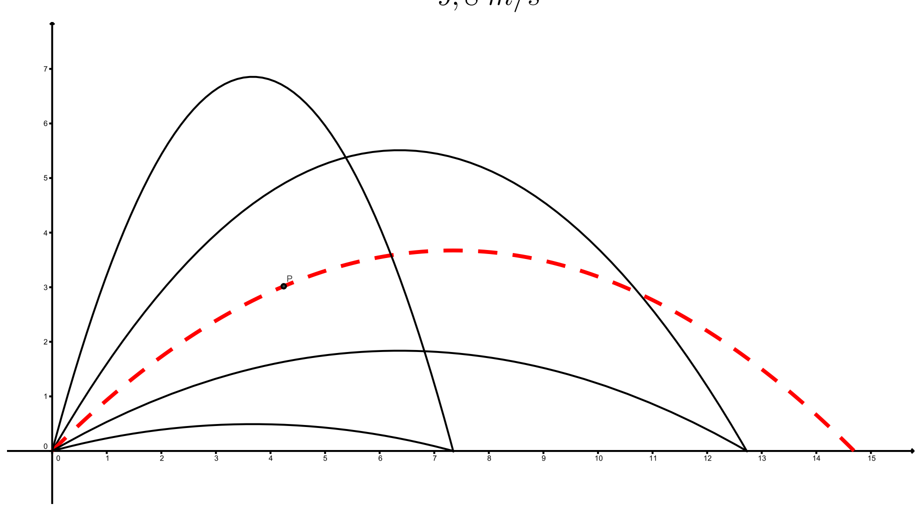


Esercizio 7. *Un ragazzo calcia un pallone con una velocità iniziale di* $12\ m/s$. *Qual è la massima gittata orizzontale?*

Soluzione. Dalla formula (3) la gittata massima orizzontale si ottiene quando l'angolo è pari a 45°, ovvero quando $v_{o,x} = v_{o,y} = \dfrac{\|\overrightarrow{v_o}\|}{\sqrt{2}}$; si ottiene quindi la formula

$$G_{max} = \frac{\|\overrightarrow{v_o}\|^2}{g}\ . \tag{4}$$

sostituendo i dati dell'esercizio si trova $G_{max} = \dfrac{(12\ m/s)^2}{9,8\ m/s^2} \approx 14,69\ m$.



Esercizio 8. *Pierino sta puntando la sua fionda, caricata con un innocuo palloncino ad acqua, verso una mela appesa al ramo di un albero. Nell'esatto istante in cui parte il "proiettile" la mela cade dall'abero. Dimostrare che Pierino ha avuto tanta fortuna...*

Soluzione. Vediamo la legge oraria del palloncino lanciato da Pierino:

$$\begin{cases} x = v_o \cos\theta\, t \\ \\ y = v_o \sin\theta\, t - \dfrac{1}{2}\, g\, t^2 \end{cases}$$

la legge oraria della mela, invece, è

$$\begin{cases} x = d \\ \\ y = h - \dfrac{1}{2}\, g\, t^2 \end{cases}$$

Per dimostrare che la mela viene colpita indipentemente dal valore di v_o (velocità iniziale del palloncino), bisogna far vedere che quando l'ordinata del palloncino è uguale a quella della mela, l'ascissa del palloncino è $x = d$.

Uguagliamo quindi le ordinate:

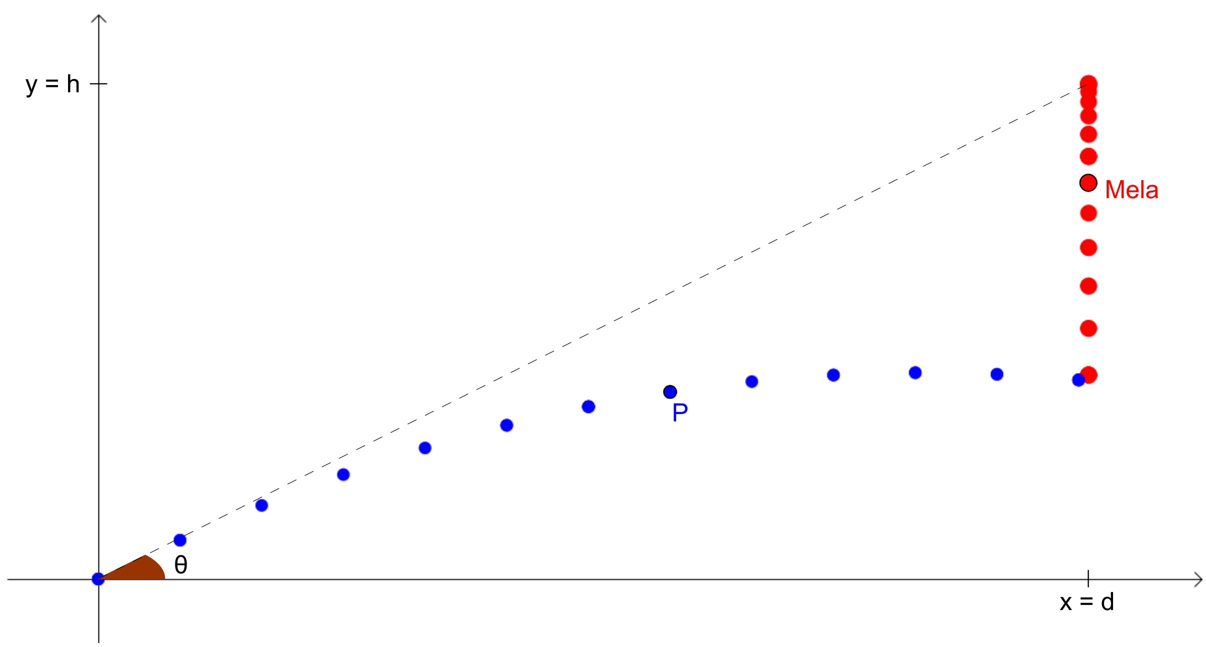
$$v_o \sin\theta\, t - \frac{1}{2}\, g\, t^2 = h - \frac{1}{2}\, g\, t^2$$

risolvendo rispetto a t si trova $t = \dfrac{h}{v_o \sin\theta}$; vediamo l'ascissa del palloncino a questo istante:

$$x^* = v_o \cos\theta \cdot \left(\frac{h}{v_o \sin\theta} \right) = h\, \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\ ;$$

d'altra parte risulta anche $\tan\theta = \dfrac{h}{d} \ \Rightarrow\ h = d \tan\theta$ e quindi

$$x^* = h \cdot \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = d \cdot \tan\theta \cdot \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = d\ .$$



Esercizio 9. *Un pallone viene calciato con velocità iniziale di* $108\ km/h$*; dopo aver rimbalzato contro un muro, distante* $15\ m$*, la palla cade a* $75,44\ m$ *dal muro stesso. Quali sono i possibili due angoli iniziali?*

<u>Soluzione.</u> Il problema equivale a trovare gli angoli per cui, se non ci fosse il muro, la gittata sarebbe pari a $(15 + 75,44)\ m = 90,44\ m$; dall'equazione (3)

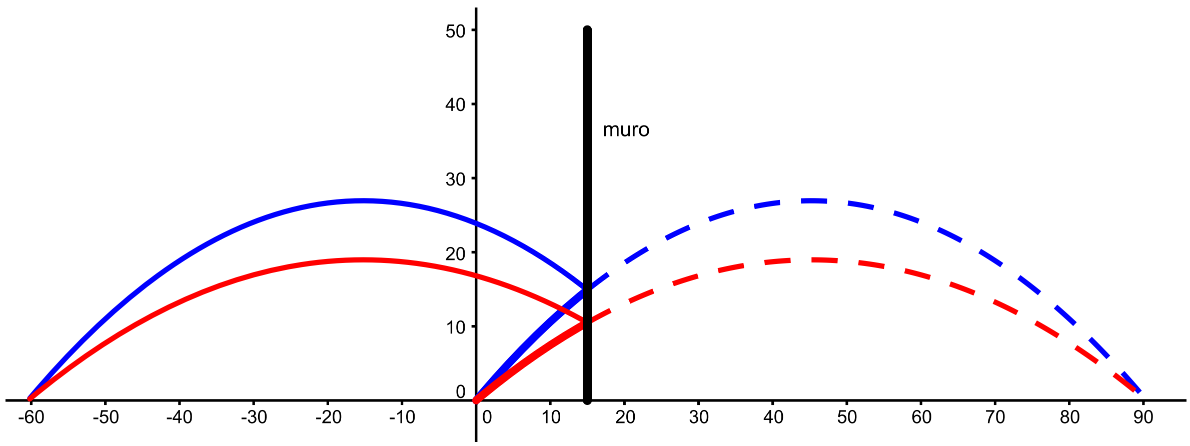
$$90,44\ m = \frac{2 \cdot v_{o,x} \cdot v_{o,y}}{9,8\ m/s^2} \quad \Rightarrow \quad 90,44\ m = \frac{((30\ m/s)\ \cos\theta) \cdot ((30\ m/s)\ \sin\theta)}{4,9\ m/s^2}$$

tenendo conto del fatto che $\sin\theta \cdot \cos\theta = \frac{1}{2}\sin(2\,\theta)$ si ha

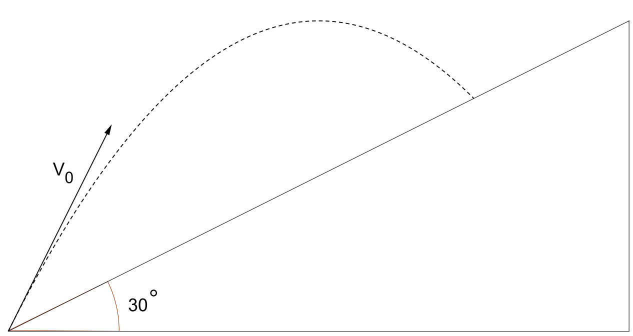
$$90,44\ m = \frac{(30^2\ m^2/s^2) \cdot \frac{1}{2} \cdot \sin(2\,\theta)}{4,9\ m/s^2}$$

risolvendo rispetto a θ si trovano questi due valori

$$\theta_1 = 40^\circ \ \ ; \ \ \theta_2 = 50^\circ \ .$$



Esercizio 10. *Un pallone è calciato con velocità iniziale di* $25\ m/s$ *su un pendio inclinato di un angolo pari a* 30° *rispetto all'orizzonte (vedi la figura). Qual è la gittata massima* **sul pendio***?*
<u>Suggerimento</u>: si usi l'equazione cartesiana della parabola di sicurezza.



E se siamo in presenza di una discesa (sempre con angolo uguale a 30°*?)*

Soluzione. La parabola di sicurezza ha equazione cartesiana

$$y = \frac{v_o^2}{2\,g} - \frac{g}{2\,v_o^2}\,x^2 \tag{5}$$

intersechiamo questa parabola (dove poniamo $v_o = 25\ m/s$) con la retta $y = \tan(30°)\,x$:

$$\begin{cases} y = 31,888 - 0,00784\,x^2 \\ y = 0,577\,x \end{cases}$$

le soluzioni del sistema sono:

$$A\begin{cases} x = 36,82 \\ y = 21,26 \end{cases} \quad ; \quad B\begin{cases} x = -110,46 \\ y = -63,78 \end{cases} \quad ;$$

la prima soluzione si riferisce al caso della salita (la gittata è $\approx 42,52\ m$), la seconda, invece, alla discesa (la gittata in questo caso è $\approx 127,55\ m$).

I due angoli (a partire dall'asse x) che permettono queste due gittate massime sono, rispettivamente, $\theta_1 = 60°$ e $\theta_2 = 150°$.