ESERCIZI LEZIONE 1 e LEZIONE 2, FISICA APPLICATA

Prof. Maria Guerrisi
Dr.Ing. Andrea Malizia

NOTA BENE: Gli esercizi che seguono hanno, per lo più, un livello di difficoltà ben maggiore di quello richiesto per il superamento dell’esame. Si consiglia quindi di analizzare solo gli esercizi visti in aula o analoghi a quelli visti in aula e sugli esercizi del libro di testo.

A.A. 2014-2015

UNITA’ di MISURA e VETTORI 5
1.1 Unità di Misura ..... **Errore. Il segnalibro non è definito.**
Esercizio 1 (Unità di misura) 5
Esercizio 2 (Unità di misura) 5
Esercizio 3 (Unità di misura) 5
Esercizio 4 (Unità di misura) 6
Esercizio 5 (Unità di misura) 6
Esercizio 6 (Unità di misura) 6
Esercizio 7 (Unità di misura) 6
Esercizio 8 (Unità di misura) 7
1.2 Vettori 7
Esercizio 9 (Calcolo vettoriale) 7
Esercizio 10 (Calcolo vettoriale) 8
Esercizio 11 (Calcolo vettoriale) 9
Esercizio 12 (Calcolo vettoriale) 10
Esercizio 13 (Calcolo vettoriale) 11
Esercizio 14 (Calcolo vettoriale) 12
Esercizio 15 (Calcolo vettoriale) 13
Esercizio 16 (Calcolo vettoriale) 13
Esercizio 16 (Calcolo vettoriale) 14
Esercizio 17 (Calcolo vettoriale) 14
Esercizio 18 (Calcolo vettoriale) 15
CINEMATICA 16
Esercizio 19 (Cinematica) 16
Esercizio 20 (Cinematica) 16
Esercizio 21 (Cinematica) 16
Esercizio 22 (Cinematica) 17
Esercizio 23 (Cinematica) 17
Esercizio 24 (Cinematica) 17
Esercizio 25 (Cinematica) 17
Esercizio 26 (Cinematica) 18
Esercizio 27 (Cinematica) 18
Esercizio 28 (Cinematica) 18

Esercizio 29 (Cinematica)....19
Esercizio 30 (Cinematica)....19
Esercizio 31 (Cinematica)....19
Esercizio 32 (Cinematica)....20
Esercizio 33 (Cinematica)....22
Esercizio 34 (Cinematica)....24
Esercizio 35 (Cinematica)....25
Esercizio 36 (Cinematica)....26
Esercizio 37 (Cinematica)....28
Esercizio 38 (Cinematica)....29
Esercizio 39 (Cinematica)....30
Esercizio 40 (Cinematica)....31
Esercizio 41 (Cinematica)....33
Esercizio 42 (Cinematica)....35
DINAMICA DEL PUNTO MATERIALE....36
Esercizio 43 (Dinamica del punto materiale)....46
Esercizio 44 (Dinamica del punto materiale)....47
Esercizio 45 (Dinamica del punto materiale)....48
Esercizio 46 (Dinamica del punto materiale)....49
Esercizio 47 (Dinamica del punto materiale)....50
Esercizio 48 (Dinamica del punto materiale)....50
Esercizio 49 (Dinamica del punto materiale)....51
Esercizio 50 (Dinamica del punto materiale)....52
Esercizio 51 (Dinamica del punto materiale)....53
Esercizio 52 (Dinamica del punto materiale)....54
Esercizio 53 (Dinamica del punto materiale)....55
Esercizio 54 (Dinamica del punto materiale)....56
Esercizio 55 (Dinamica del punto materiale)....57
Esercizio 56 (Dinamica del punto materiale)....58
Esercizio 57 (Dinamica del punto materiale)....59
Esercizio 58 (Dinamica del punto materiale)....60
Esercizio 59 (Dinamica del punto materiale)....61
Esercizio 60 (Dinamica del punto materiale)....62

Esercizio 61 (Dinamica del punto materiale) 63
Esercizio 62 (Dinamica del punto materiale) 65
Esercizio 63 (Dinamica del punto materiale) 66
Esercizio 64 (Dinamica del punto materiale) 67
Esercizio 65 (Dinamica del punto materiale) 68
Esercizio 66 (Dinamica del punto materiale) 70
Esercizio 67 (Dinamica del punto materiale, Gravitazione) 72
Esercizio 68 (Dinamica del punto materiale, Gravitazione) 73
Esercizio 69 (Dinamica del punto materiale) 74
Esercizio 70 (Dinamica del punto materiale) 75
Esercizio 71 (Dinamica del punto materiale) 76
Esercizio 72 (Dinamica del punto materiale) 79
Esercizio 73 (Dinamica del punto materiale) 80

UNITA' di MISURA e VETTORI

Esercizio 1 (Unità di misura)

Cronometra il tempo che impieghi a leggere una pagina. Esprimi il risultato in ore, poi in minuti e infine in secondi.

Sol.

Supponiamo che tu ci impieghi 2 minuti e 25 secondi. Per convertire questa durata in ore, o solo minuti, o solo secondi, ricordiamo che i fattori di conversione sono:

1 ora = 60 minuti 1 minuto = 1/60 ore
1 minuto = 60 secondi 1 secondo = 1/60 minuti
Quindi, 2 minuti e 25 secondi sono
(2 + 25/60) minuti = 2,417 minuti = (2 · 60 + 25) s = 145 s.

Esercizio 2 (Unità di misura)

La Terra ruota su se stessa compiendo un giro in 24 ore. Di quanti gradi si sposta in un minuto? Esprimi il risultato in gradi, poi in minuti d'arco e infine in secondi d'arco.

Sol.

Se la Terra ruota di 360° in 24 ore, in un minuto ; che è una frazione pari a 1/(24*60) di giorno ; ruoterà di=

360°/(24*60)=0,25°

e, poiché: 1° = 60' 1' = (1/60)° ; 1' = 60''; 1''= (1/60)'

Avremo

0,25° = 15' = 900''

Esercizio 3 (Unità di misura)

Un certo orologio a pendolo (con un quadrante di 12 ore) anticipa 1 min/giorno . Dopo aver regolato l'orologio al momento attuale, quanto tempo bisogna attendere affinché indichi di nuovo l'ora giusta?

Sol.: Il quadrante segna solo 12ore, cioè mezza giornata. Il numero dei minuti sul quadrante saranno: 1giorno = (24·60)/2 = (1440/2) min = 720min. Saranno necessari pertanto 720giorni.

Esercizio 4 (Unità di misura)

L'Antartide è di forma semicircolare, con raggio di $2000\,km$. Lo spessore medio dello strato di ghiaccio che lo ricopre è di $3000\,m$. Quanti centimetri cubi di ghiaccio contiene l'Antartide? (Si trascuri la curvatura della

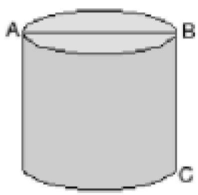
Terra).

Soluzione: Non dovendo considerare la curvatura della Terra, possiamo supporre la forma del solido come quella mostrata in figura. Il volume di ogni solido a due basi parallele è dato dal prodotto della sua area di base per l'altezza. Pertanto, sapendo che $2000\,km = 2\cdot 10^8\,cm$ e $3000\,m = 3\cdot 10^5\,cm$,:

$$V = A_b \cdot h = \frac{\pi r^2}{2}\cdot h = \frac{\pi\left(2\cdot 10^8\,cm\right)^2\cdot 3\cdot 10^5\,cm}{2} = 1.9\cdot 10^{22}\,cm^3$$

Esercizio 5 (Unità di misura)

Il chilogrammo campione ha la forma di un cilindro circolare retto con l'altezza uguale al diametro. Dimostrare che, per un cilindro circolare di un determinato volume, questa uguaglianza garantisce la minima area superficiale, rendendo così minimi gli effetti di deterioramento superficiale.



Soluzione: Per un cilindro circolare, se indichiamo con $AB = 2r$, il suo volume sarà $V = \pi r^2\cdot h$. La sua superficie totale sarà $S_{tot} = 2\pi r\cdot h + 2\pi r^2 = 2\pi r\,(h+r)$. Ora ricavando h dal volume $h = \frac{V}{\pi r^2}$ e sostituendolo nella superficie, si ha $S == 2\pi r\left(\frac{V+\pi r^3}{\pi r^2}\right) = 2\left(\frac{V+\pi r^3}{r}\right)$. Per trovare la condizione di minima superficie, calcoliamo la derivata prima della superficie rispetto al raggio e uguagliamola a zero (assumiamo il volume come costante assegnata).

$$S' = \frac{6\pi r^3 - 2V - 2\pi r^3}{r^2} = 0$$

la frazione si annulla se si annulla il suo numeratore; ne segue che $4\pi r^3 = 2V$, cioè $V = 2\pi r^3$. Tale condizione si realizza per il cilindro circolare retto con $AB = BC$, cioè con $h = 2r$; infatti in tale caso il volume sarà $V = \pi r^3\cdot 2r = 2\pi r^3$

Esercizio 6 (Unità di misura)

Le velocità massime in km/h di diversi animali sono all'incirca le seguenti: (a) lumaca, $5\cdot 10^{-2}$; (b) ragno, 2; (c) uomo, 40, e (d) ghepardo, 110. Convertire questi dati in metri al secondo.

Soluzioni: Il fattore di trasformazione da $\frac{km}{h}\to\frac{m}{s} = \frac{1}{3.6}$, in quanto $1\,km = 1000\,m$ e $1\,h = 3600\,s$. Si ha quindi $v_{lu} = \frac{5\cdot 10^{-2}}{3.6} = 0.014\,m/s$; $v_{ra} = \frac{2}{0.36} = 0.56\,m/s$; $v_u = \frac{40}{0.36} = 11.1\,m/s$; $v_{gh} = \frac{110}{0.36} = 30.56\,m/s$.

Esercizio 7 (Unità di misura)

Una persona a dieta può perdere fino a $2.3\,kg$ alla settimana. Esprimere la perdita di massa in milligrammi al secondo.

Soluzione: Sapendo che $1\,kg = 10^6\,mg$ e che $1\,settimana = 7\cdot 24\cdot 3600\,s$, si ha $\frac{2.3\cdot 10^6\,mg}{7\cdot 24\cdot 3600\,s} = 3.80\frac{mg}{s}$.

Esercizio 8 (Unità di misura)

La densità del ferro è $7.87\, g/cm^3$, e la massa di un atomo di ferro è $9.27 \cdot 10^{-26} kg$. Se gli atomi sono sferici e ben impaccati (a) qual è il volume di un atomo di ferro?, e (b) qual è la distanza fra i centri di atomi adiacenti ?

Caso (a): La densità è il rapporto tra la massa e il volume; si ha $V = \frac{M}{d} = \frac{9.27 \cdot 10^{-26} kg}{7870 kg/m^3} = 1.18 \cdot 10^{-29} m^3$; il volume di una sfera è $V = \frac{4\pi r^3}{3}$, da cui si ricava che $r = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}$, sostituendo i valori delle grandezze si ha $r = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 1.18 \cdot 10^{-29}}{4\pi}} = 1.41 \cdot 10^{-20} m$; si ricava che la distanza minima tra i due centri è uguale al diametro dell'atomo pari a $d_{c1-c2} = 2.82 \cdot 10^{-20} m$.

1.2 Vettori

Esercizio 9 (Calcolo vettoriale)

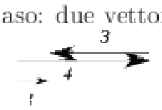
Si considerino due spostamenti, uno di modulo $3\,m$ e un altro di modulo $4\,m$. Si mostri in che modo si possono combinare i vettori spostamento per ottenere uno spostamento risultante di modulo $7\,m$, $1\,m$, $5\,m$.

Soluzione: Affrontando la somma di vettori, cioè la ricerca della risultante, dal punto di vista grafico, si possono presentare i seguenti casi:

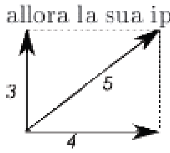
1. i due vettori sono paralleli e concordi (stesso verso): la somma è il vettore che ha la stessa direzione e lo stesso verso dei due vettori e modulo uguale alla somma dei due moduli
2. i due vettori sono paralleli e discordi (verso opposto): la somma è il vettore che ha la stessa direzione dei due vettori il verso è quello del vettore col modulo maggiore e il cui modulo è dato dalla differenza dei due moduli
3. i due vettori non sono paralleli, ma hanno in comune la coda (cioè il punto opposto alla freccia): la risultante è il vettore che rappresenta la diagonale del parallelogramma che ha i due vettori dati come lati consecutivi
4. i due vettori non sono paralleli e tali che la coda dell'uno coincida con la punta dell'altro: la risultante è il vettore che unisce il due vettori dati a formare un triangolo.
   Per quanto detto, è possibile pensare alle seguenti disposizioni:

1° caso: due vettori paralleli e concordi, poiché il vettore risultante ha modulo dato dalla somma dei due

2° caso: due vettori paralleli e discordi, la cui ha modulo dato dalla differenza dei due vettori



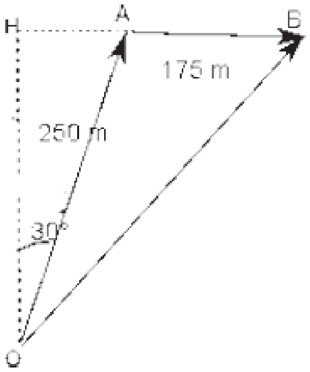
3° caso: i due vettori sono fra loro perpendicolari e la risultante è la diagonale del rettangolo che li ha come lati: infatti i numeri $3, 4, 5$ formano una terna pitagorica, cioè se 3 e 4 sono i cateti di un triangolo rettangolo, allora la sua ipotenusa è 5.



Esercizio 10 (Calcolo vettoriale)

Una donna cammina per $250\,m$ in una direzione che forma un angolo di 30 verso est rispetto al nord, poi per $175\,m$ direttamente verso est. (a) Usando sistemi grafici si trovi uno spostamento finale dal punto di partenza. (b) si confronti il modulo del suo spostamento con la distanza che ha percorso.

Caso (a): la somma grafica dei due vettori si ottiene completando il parallelogramma che ha come lati consecutivi i due vettori, come mostrato in figura



Caso (b): per calcolare il suo spostamento (cioè il vettore risultante) osserviamo che il triangolo OHA è la metà di un triangolo equilatero. Da questa osservazione si deduce che $AH = \frac{AO}{2} = 125\,m$ e quindi $BH = 300\,m$. Inoltre OH è l'altezza di tale triangolo, per cui $OH = 125\sqrt{3}\,m$. Pertanto per trovare OB possiamo applicare il teorema di Pitagora al triangolo OHB:

$$OB = \sqrt{OH^2 + BH^2} = \sqrt{46875 + 90000} = 370\,m$$

Come si può osservare il modulo dello spostamento è minore della distanza effettivamente percorsa, ma questo fatto è insito nella definizione di spostamento che viene calcolato considerando il punto iniziale e finale e non il percorso intermedio effettivamente fatto.

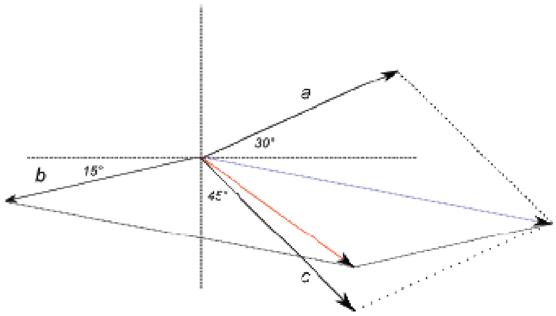
$$d_{percorsa} = 425\,m \qquad spostamento = 370\,m$$
$$differenza = 55\,m$$

L'angolo $\angle BOH = \arctan \frac{300\,m}{125\sqrt{3}\,m} = 54$

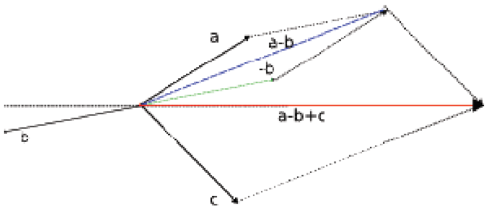
Esercizio 11 (Calcolo vettoriale)

Tre vettori, $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ ciascuno con un modulo di 50 unità, giacciono sul piano xy e formano angoli rispettivamente di 30, 195 e 315 con l'asse x. Trovare con metodo grafico i moduli e le direzioni dei vettori (a) $\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c}$, (b) $\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c}$ e (c) un vettore $\overrightarrow{d}$ tale che $\left(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}\right)-\left(\overrightarrow{c}+\overrightarrow{d}\right)=0$.

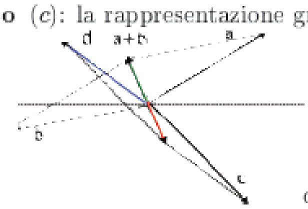
Caso (a): nel disegno sono riportate le direzioni dei vettori indicati e la loro somma.
il vettore in blu è la somma parziale tra a e c, mentre quello in rosso è la somma totale. (la somma di tre vettori si esegue applicando la proprietà associativa).



Caso (b): l'operazione $\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}$ si esegue sommando al vettore $\overrightarrow{a}$, l'opposto del vettore $\overrightarrow{b}$ (in verde in figura). La somma eseguita graficamente è mostrata in figura



Caso (c): la rappresentazione grafica dell'espressione è data in figura



dove il vettore $\overrightarrow{d}$ è indicato in blu. La somma indicata nel testo risulterà nulla in quanto i vettori risultanti da $\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}$ e $\overrightarrow{c}+\overrightarrow{d}$ sono uguali in modulo e direzione, ma opposti in verso.

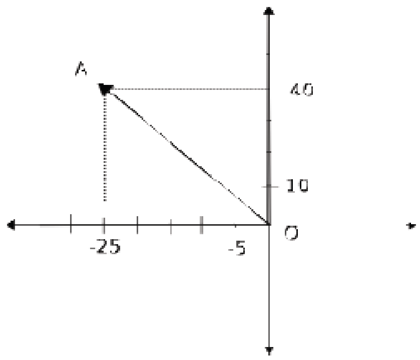
Esercizio 12 (Calcolo vettoriale)

La componente x di un determinato vettore è -25.0 unità e la componente y è $+40.0$ unità. (a) Qual è il modulo del vettore? (b) Qual è l'angolo tra la direzione del vettore e il semiasse positivo dell'asse x?

Caso (a): Questo esercizio chiede di rappresentare i vettori in un piano cartesiano e di usare come direzioni di riferimento quelle dell'asse x (orizzontale) e dell'asse y (verticale). In tal modo le componenti rappresentano le coordinate dell'estremo finale del vettore, se ha la «coda» nell'origine del piano cartesiano. Il modulo di un vettore è pertanto la lunghezza del segmento nel piano cartesiano ed è ottenibile con la classica formula della distanza (teorema di Pitagora)

$$\overline{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

Osservando la figura, nella quale è rappresentato il vettore indicato



In questo caso

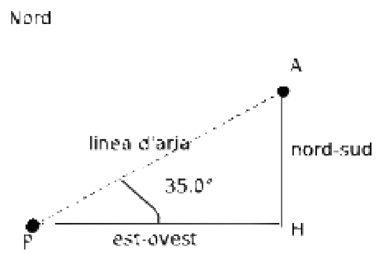
$$OA = \vec{v} = \sqrt{(-25-0)^2 + (40-0)^2} = \sqrt{625+1600} = 47.2\,u$$

Caso (b): l'angolo formato con il semiasse positivo delle x è ricavabile tramite la funzione inversa della tangente

$$\alpha = \arctan\left(\frac{40}{-25}\right) = 122$$

Esercizio 13 (Calcolo vettoriale)

Una persona desidera raggiungere un punto che si trova a $3.40\,km$ di distanza dalla sua attuale posizione, in direzione 35.0 a nord-est. Ma questa persona è costretta a percorrere strade orientate nord-sud o est-ovest. Qual è la lunghezza dell'itinerario minimo che essa potrebbe percorrere per raggiungere la sua destinazione?

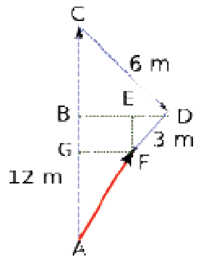


Soluzione: Gli spostamenti est-ovest o nord-sud rappresentano le coordinate del punto A, supposto P come origine. Il percorso minimo è quindi la somma dei segmenti PH e AH.

$$d = AH + PH = 3.40\,(\sin 35.0 + \cos 35.0) = 4.74\,km$$

Esercizio 14 (Calcolo vettoriale)

Un giocatore di golf riesce a mettere in buca in tre colpi. Il primo colpo sposta la palla $12\,m$ verso nord, il secondo $6.0\,m$ verso sud-est, e il terzo $3.0\,m$ verso sud-ovest. Quale spostamento sarebbe stato necessario far compiere alla palla per piazzarla nella buca al primo tiro?



Soluzione: Osserviamo la figura. I triangoli CDB, FED sono rettangoli isosceli (metà di un quadrato), tenuto conto delle direzioni indicate nei dati. Sapendo che la relazione tra lato e diagonale di un quadrato è

$$l = \frac{d}{\sqrt{2}}$$

si ha

$$BD = \frac{6}{\sqrt{2}} = 4,2\,m$$

analogamente

$$ED = \frac{3}{\sqrt{2}} = 2,1\,m$$

si ha quindi

$$BE = GF = 4,2 - 2,1 = 2,1\,m$$

inoltre $CG = CB + BG = BD + ED = 4,2 + 2,1 = 6,3\,m$
Pertanto

$$AG = 12 - 6,3 = 5,7\,m$$

possiamo ora calcolare il modulo del vettore spostamento AF,

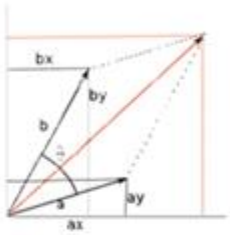
$$AF = \sqrt{AG^2 + GF^2} = \sqrt{5,7^2 + 2,1^2} = 6\,m$$

La direzione si può calcolare rispetto alla direzione nord, calcolando l'angolo $G\hat{A}F$

$$G\hat{A}F = \arctan\frac{GF}{AG} = \arctan\frac{2,1}{5,7} = 20,2$$

Esercizio 15 (Calcolo vettoriale)

Due vettori di lunghezza a e b formano un angolo θ compreso fra le loro direzioni quando hanno in comune la coda. Si dimostri, ricavando le componenti lungo due assi perpendicolari, che la lunghezza della loro somma è $r = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos\theta}$:



Soluzione: prendiamo come riferimento la figura sopra. Indichiamo con α l'angolo tra il vettore a e l'asse x.

$$\begin{aligned} a_x &= a\cos\alpha \\ a_y &= a\sin\alpha \end{aligned}$$

Analogamente, l'angolo tra il vettore b e l'asse x, sarà $\alpha + \theta$

$$\begin{aligned} b_x &= b\cos(\alpha+\theta) \\ b_y &= b\sin(\alpha+\theta) \end{aligned}$$

Di conseguenza, essendo $(a+b)_x = a_x + b_x$ e $(a+b)_y = a_y + b_y$, si ottiene

$$\begin{aligned} (a+b)_x &= a\cos\alpha + b\cos(\alpha+\theta) \\ (a+b)_y &= a\sin\alpha + b\sin(\alpha+\theta) \end{aligned}$$

Calcoliamo ora il modulo del vettore risultante

$$\begin{aligned} \|a+b\| &= \sqrt{(a+b)_x^2 + (a+b)_y^2} = \\ &= \sqrt{a^2\cos^2\alpha + b^2\cos^2(\alpha+\theta) + 2ab\cos\alpha\cos(\alpha+\theta) +} \\ &\quad \sqrt{+a^2\sin^2\alpha + b^2\cos^2(\alpha+\theta) + 2ab\sin\alpha\sin(\alpha+\theta)} = \\ &= \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab[\cos\alpha\cos(\alpha+\theta) + \sin\alpha\sin(\alpha+\theta)]} = \\ &= \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos(\alpha - \alpha - \theta)} = \\ &= \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos(\theta)} \end{aligned}$$

Esercizio 16 (Calcolo vettoriale)

Un vettore $\vec{a}$ ha modulo $2.5\,m$ ed è rivolto a nord. Quali sono modulo e direzione dei vettori $4.0\vec{a}$ e $-3.0\vec{a}$

Soluzione: Il prodotto di un vettore per uno scalare rappresenta un multiplo del vettore assegnato, che modifica solo il proprio modulo, lasciando invariate direzione e verso: i moduli risultano quindi

$$a_1 = 4.0 \cdot 2.5\,m = 10.0\,m$$

$$a_2 = -3.0 \cdot 2.5\,m = -7.5\,m$$

i versi saranno nord per a_1 e sud per a_2.

Esercizio 16 (Calcolo vettoriale)

Dati i due vettori $\vec{u} = (1, 0, -1)$ e $\vec{v} = (2, 4, 3)$;

1)Calcolarne il prodotto scalare e vettoriale .

2)Trovare l'angolo compreso tra i 2 vettori.

Soluzione 1)

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z = 2 - 3 = -1$$

$$\vec{u}\times\vec{v} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 4\,\hat{i} - 5\,\hat{j} + 4\,\hat{k} \rightarrow \vec{u}\times\vec{v} = (4, -5, 4)$$

Soluzione 2)

$$|\vec{u}| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{2^2 + 4^2 + 3^2} = \sqrt{29}$$

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}|\cos\alpha \rightarrow \cos\alpha = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|} = \frac{-1}{\sqrt{58}} \rightarrow \alpha = \arccos\frac{-1}{\sqrt{58}} = 82.4\,°$$

Esercizio 17 (Calcolo vettoriale)

Dati i vettori $\begin{cases} \vec{v}_1 = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k} \\ \vec{v}_2 = 2\,\hat{j} - \hat{k} \end{cases}$ Determinare un terzo vettore complanare

Per prima cosa, facendo il prodotto vettoriale, possiamo ricavare il vettore ortogonale al piano dei primi due.

Versore

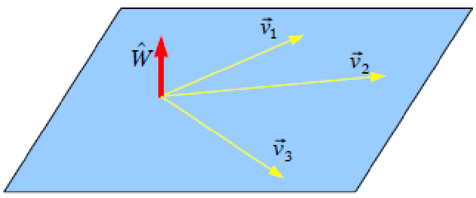
$$\vec{W} = \vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2 = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -3\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k} \rightarrow |\vec{W}| = \sqrt{9+1+4} = \sqrt{14} \rightarrow \hat{W} = \frac{\vec{W}}{|\vec{W}|} = \frac{1}{\sqrt{14}}\left(-3\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}\right)$$

A questo punto il vettore che cerchiamo deve essere ortogonale a questo appena trovato, quindi deve essere nullo il loro prodotto scalare.

Sia $\vec{v}_3 = x\,\hat{i} + y\,\hat{j} + z\,\hat{k}$ il vettore generico, il prodotto scalare sarà: $\vec{W}\cdot\vec{v}_3 = -3x + y + 2z = 0$

Quest' ultima relazione lascia libertà di scelta su almeno 2 dei 3 coefficenti, possiamo porre ad esempio:

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \\ z = 3 \end{cases} \Longrightarrow \vec{v}_3 = 2\,\hat{i} + 3\,\hat{k}$$



Esercizio 18 (Calcolo vettoriale)

Dati i vettori $\begin{cases} \vec{v}_1 = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k} \\ \vec{v}_2 = 2\hat{j} - \hat{k} \end{cases}$ Determinare l'angolo che formano.

Nell'esercizio precedente abbiamo già calcolato il loro prodotto vettore. Sfruttiamo questa informazione per determinare il seno dell'angolo:

$$\vec{W} = \vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2 = -3\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k} \rightarrow |\vec{W}| = W = \sqrt{9+1+4} = \sqrt{14}$$

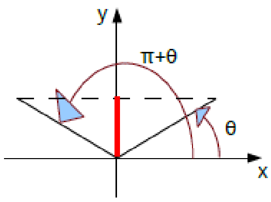
I moduli dei due vettori valgono: $\begin{cases} v_1 = \sqrt{1^2+1^2+1^2} = \sqrt{3} \\ v_2 = \sqrt{2^2+(-1)^2} = \sqrt{5} \end{cases}$

Ora dalla definizione di prodotto vettore ricaviamo il seno: $\boxed{\sin\theta = \frac{W}{v_1 v_2} = \sqrt{\frac{14}{15}}}$

Questa informazione non e' sufficiente per determinare univocamente l'angolo cercato poichè

$\sin\theta = \sin(\pi - \theta)$

Che graficamente si esprime



CINEMATICA

Esercizio19 (Cinematica)

La velocità lineare scalare *v* di un punto materiale in funzione della distanza percorsa *s* è data da $v(s) = v_0 - bs$ con v_0= 4 m/s e *b*= 5 s^{-1}. determinare la distanza percorsa all'istante *t*= 0,2 s.

SOL.- $\frac{ds}{dt} = v_0 - bs$, $\frac{ds}{v_0 - bs} = dt$, che integrata fornisce $s(t) = \frac{v_0}{b}(1 - e^{-bt}) =$ 0,51 m.

Esercizio 20 (Cinematica)

Un grave viene lanciato con velocità iniziale $\mathbf{v_o}$ di modulo pari a 10 m/s formante un angolo θ= 60° rispetto all'orizzontale. Calcolare il raggio di curvatura della traiettoria quando raggiunge il punto più alto della traiettoria.

SOL.- Sia t_v l'istante in cui il punto raggiunge il vertice della traiettoria parabolica

$a = (a_\tau^2 + a_n^2)^{½} = \left((dv/dt_{(t=tv)})^2 + (v^2/\rho_{(t=tv)})^2 \right)^{½}$

$\Rightarrow g = (v_o \cos\theta)^2/\rho \;\; \Rightarrow \rho \cong 2.5$ m

Esercizio 21 (Cinematica)

Un punto descrive un moto lineare armonico con periodo *T*= 4,4 s, si trova all'istante *t*= 0 in x(0)= 0,28 m con velocità v(0)= -2,5 m/s. Scrivere l'equazione oraria del moto e calcolare i valori massimi della velocità e dell'accelerazione.

SOL.- La forma generale dell'equazione oraria è $x(t) = A\text{sen}(\frac{2\pi}{T}t + \phi)$, da cui si ha: $A\text{sen}\,\phi =$0,28 m, $\omega A\cos\phi =$-2,5 m/s, da cui $\phi =$ 170.9°= 2,98 rad e *A*= 1,77 m. Pertanto l'equazione oraria è: $x(t) = 1{,}77\,\text{sen}(1{,}43t + 2{,}98)$. I valori massimi della velocità e dell'accelerazione sono: $v_{\max} = \omega A =$ 2,53 m/s e $a_{\max} = \omega^2 A =$3,62 m/s^2.

Esercizio 22 (Cinematica)

A partire dalla posizione di mezzogiorno, determinare le posizioni angolari in cui le lancette delle ore e dei minuti vengono a sovrapporsi.

SOL.- L'equazione oraria della lancetta delle ore è: $\theta(t) = \omega_{ore} t$. Quella della lancetta dei minuti è: $\theta(t) = \omega_{\min} t + n2\pi$, con n=1, 2, 3, …, con $\omega_{\min} = 12 \cdot \omega_{ore}$. Dalle precedenti si ottiene $\theta_n = 2\pi n/11$, cioè $\theta_1 = 32{,}7°$, $\theta_2 = 65{,}4°$,

Esercizio 23 (Cinematica)

Un punto materiale, inizialmente fermo, si muove su una traiettoria circolare di raggio R= 20 m con un'accelerazione angolare $\dot{\omega} =$ 2 rad/s^2. Determinare il modulo dell'accelerazione lineare all'istante t*= 1 s.

SOL.- Il modulo dell'accelerazione vale

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = \sqrt{(\dot{\omega} R)^2 + \left(\frac{v^2(t^*)}{R}\right)^2} = \sqrt{(\dot{\omega} R)^2 + \left(\frac{(\dot{\omega} t^* R)^2}{R}\right)^2} = 89{,}44 \text{ m/s}^2.$$

Esercizio 24 (Cinematica)

Assumendo la velocità di propagazione del suono in aria è $v_s = 340$ m/s determinare la profondità di un pozzo sapendo che tra l'istante in cui si fa cadere un sasso con velocità iniziale nulla e l'istante in cui si ode il tonfo passano t= 4,8 s. Per il moto del sasso si trascuri la resistenza dell'aria.

SOL.- L'intervallo di tempo è $t = \sqrt{2H/g} + H/v_s$ da cui H= 99,5 m.

Esercizio 25 (Cinematica)

Due autoveicoli partono da fermi con un intervallo Δt= 1 min e si muovono con la stessa accelerazione a= 0,4 m/s^2. Dopo quanto tempo dalla partenza del primo autoveicolo la loro mutua distanza è Δs= 4,2 km?

SOL.- Le distanze percorse dai due autoveicoli sono $s_1 = at^2/2$, $s_2 = a(t-\Delta t)^2/2$. Per differenza $s_1 - s_2 = \Delta s = a\Delta t(t - \Delta t/2)$ da cui si ottiene $t = \Delta s/(a\Delta t) + \Delta t/2 =$ 205 s.

Esercizio 26 (Cinematica)

Due proiettili sono lanciati con velocità iniziali uguali in modulo e alzi di 15° e 30° rispettivamente. Determinare il rapporto tra le altezze massime raggiunte dai due proiettili

SOL.- L'altezza massima raggiunta è proporzionale al quadrato della componente verticale della velocità iniziale, sicché $\frac{h_1}{h_2} = \frac{\sin^2\alpha_1}{\sin^2\alpha_2} = 0{,}27.$

Esercizio 27 (Cinematica)

Se due punti materiali si muovono di moto rettilineo uniforme l'uno verso l'altro la loro distanza diminuisce di Δx_1=16 m ogni Δt_1=10 s. Se essi si muovono con le stesse velocità ma nello stesso verso la loro distanza aumenta di Δx_2=3 m ogni Δt_2=5 s. Determinare le velocità dei punti materiali.

SOL.- Le velocità relative nei due casi sono: $V_1 = v_1 + v_2 = \Delta x_1/\Delta t_1$, $V_2 = v_1 - v_2 = \Delta x_2/\Delta t_2$. Da tali relazioni si ottiene $v_1 = (V_1 + V_2)/2$ =1,1 m/s, $v_2 = (V_1 - V_2)/2$ =0,5 m/s.

Esercizio 28 (Cinematica)

Due corpi puntiformi sono lanciati verticalmente verso l'alto da fermi: il primo con velocità iniziale v_0= 5 m/s, il secondo corpo con velocità iniziale $v_0/2$ e τ= 3 s dopo il primo. Determinare direzione e modulo della velocità relativa del secondo corpo rispetto al primo per $t>\tau$.

SOL.- La velocità assoluta del primo corpo rispetto a un riferimento fisso solidale con la terra è

$v_1 = v_0 - gt$; quella del secondo è: $v_2 = \frac{v_0}{2} - g(t-\tau)$. La velocità relativa del secondo rispetto al primo è:

$v_{rel} = v_2 - v_1 = -\frac{v_0}{2} + g\tau =$ 26,93 m/s ed è diretta verso l'alto.

Esercizio 29 (Cinematica)

Un punto materiale è posto in quiete su un piano inclinato di alzo α= 30°. Quale accelerazione orizzontale occorre impartire al piano affinché il punto cada liberamente rimanendo sempre in contatto con il piano stesso?

SOL.- In caduta libera il punto si muove con $y = gt^2/2$, mentre il piano si muove con $x = at^2/2$. Affinché vi sia contatto $y = x\tan\alpha$, che derivata due volte dà $g = a\tan\alpha$, cioè $a = g/\tan\alpha =$ 17 m/s^2.

Esercizio 30 (Cinematica)

Due palline cadono, in due istanti diversi, dalla stessa altezza con velocità iniziale nulla. Se dopo 4 s che la seconda pallina ha iniziato la caduta la distanza tra le due è di 50 m, si determini il ritardo con il quale è partita la seconda pallina rispetto alla prima.

SOL.- Se x_1 ed x_2 rappresentano lo spazio percorso dalla pallina 1 e dalla 2, orientando l'asse x concordemente alla accelerazione di gravità e ponendo $t_1=t_2+\Delta t$, si ottiene $d = x_1 - x_2 = \frac{1}{2} g\Delta t(2t_2 + \Delta t)$; $\Delta t = -t_2 + \sqrt{t_2^2 + 2d/g} \cong$1,12 s

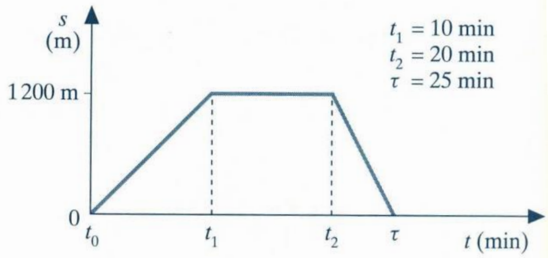
Esercizio 31 (Cinematica)

Su una piattaforma circolare orizzontale, inizialmente ferma e poi rotante ad accelerazione angolare costante $\dot{\omega}$=0,1 rad/s^2 intorno al proprio asse verticale fisso, un punto materiale P si muove a velocità relativa costante v_{rel}=0,5 m/s lungo una traiettoria radiale, essendo all'istante iniziale nel centro della piattaforma. Determinare il modulo dell'accelerazione lineare posseduta da P all'istante t^*=10 s rispetto a un osservatore fisso esterno alla piattaforma.

SOL.- Dalla legge di composizione delle accelerazioni nei moti relativi: $\boldsymbol{a}_{ass} = \boldsymbol{a}_{O} + \boldsymbol{a}_{rel} + \boldsymbol{a}_{trsc} + \boldsymbol{a}_{Cor}$, essendo $\boldsymbol{a}_O$=0 (il centro O della piattaforma è fermo), $\boldsymbol{a}_{rel}$=0 perché $\boldsymbol{v}_{rel}$=cost, $\boldsymbol{a}_{trasc} = \boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}) + \dot{\boldsymbol{\omega}}\times\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{a}_{Cor} = 2\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}_{rel}$. Il modulo dell'accelerazione lineare assoluta è $a_{ass} = \sqrt{(\omega^2 r)^2 + (\dot{\omega}r + 2\omega v_{rel})^2}$ =5,2 m/s^2, essendo $\omega = \dot{\omega}t^*$, $r = v_{rel}t^*$.

Esercizio 32 (Cinematica)

Un corpo puntiforme si muove lungo una certa traiettoria sulla quale è fissato un sistema di ascisse curvilinee s. Il grafico della legge oraria, $s = s(t)$, relativo all'intervallo di tempo ($t_0 = 0, \tau = 25\,\text{min}$) è rappresentato in figura. Si deducano dal grafico le caratteristiche del moto nell'intervallo di tempo considerato e si determinino i corrispondenti valori medi della velocità scalare del corpo, del modulo della velocità scalare e dell'accelerazione scalare.



PROBLEMA 1-1

La posizione occupata dal corpo al generico istante t è individuata dal valore $s(t)$ dell'ascissa curvilinea. Come si vede dal grafico, all'istante t_0 il corpo si trova nell'origine delle ascisse curvilinee. Dall'istante t_0 a quello t_1 l'ascissa $s(t)$ varia linearmente col tempo e il moto del corpo è uniforme: la velocità scalare resta misurata dal coefficiente angolare del corrispondente tratto rettilineo del grafico e risulta

$$v_1 = \frac{s(t_1) - s(t_0)}{t_1 - t_0} = 120\,\text{m/min} = 2\,\text{m/s}\,.$$

Il fatto che la velocità scalare sia positiva indica che il corpo si muove nel verso positivo delle ascisse curvilinee.

Dall'istante t_1 a quello t_2 l'ascissa curvilinea resta costante: il corpo mantiene inalterata la sua posizione e quindi la velocità scalare v_2 è nulla.

All'istante t_2 il corpo si rimette in movimento nel verso opposto rispetto a quello nell'intervallo di tempo (t_0, t_1) e la velocità scalare fino al tempo τ è

$$v_3 = \frac{s(\tau) - s(t_2)}{\tau - t_2} = -240\,\text{m/min} = -4\,\text{m/s}\,.$$

All'istante τ il corpo si ritrova nell'origine delle ascisse. Per definizione di velocità scalare, si ha

$$v_m(t_0, \tau) = \frac{s(\tau) - s(t_0)}{\tau - t_0} = 0\,,$$

mentre il valore medio del modulo della velocità scalare è

$$|v_m| = \frac{(t_1 - t_0)|v_1| + (t_2 - t_1)|v_2| + (\tau - t_2)|v_3|}{\tau - t_0} = 96\,\text{m/min} = 1.6\,\text{m/s}\,.$$

Alternativamente:

$$|v_m| = \frac{\text{spazio totale percorso}}{\text{tempo impiegato}} = \frac{2\,400\,\text{m}}{25\,\text{min}} = 96\,\text{m/min}\,.$$

Infine, l'accelerazione scalare media risulta:

$$a_m(t_0, \tau) = \frac{v(\tau) - v(t_0)}{\tau - t_0} = \frac{v_3 - v_1}{\tau - t_0} = -14.4\,\text{m/min}^2 = -4 \times 10^{-3}\,\text{m/s}^2.$$

Si noti che, come conseguenza del grafico dato in figura, all'istante t_1 la velocità passa da un valore finito al valore zero in un intervallo di tempo nullo. Questo nella pratica non può verificarsi, cosicché nel grafico lo spigolo all'istante t_1 (e analogamente all'istante t_2) dovrebbe essere sostituito da un piccolo tratto curvo, con lunghezza e curvatura dipendenti dalla durata del tempo di accelerazione.

Esercizio 33 (Cinematica)

Un veicolo inizialmente fermo si mette in movimento su un lungo rettilineo con accelerazione costante di modulo $a_1 = 900\,\mathrm{km/h^2}$. Dopo un intervallo di tempo $\tau_1 = 4\,\mathrm{min}$ l'accelerazione si annulla bruscamente e il moto del veicolo resta uniforme per un intervallo di tempo $\tau_2 = 10\,\mathrm{min}$, dopodiché il veicolo comincia a rallentare con accelerazione costante di moduo $a_2 = 1\,800\,\mathrm{km/h^2}$. Si calcoli:

$a)$ **l'intervallo di tempo τ_3 impiegato dal veicolo per fermarsi e lo spazio totale percorso dal veicolo;**

$b)$ **la velocità scalare media v_m e l'accelerazione scalare media a_m del veicolo sull'intero percorso.**

Si consideri lungo il percorso del veicolo un sistema di ascisse s orientato nel verso di moto del veicolo; se a indica l'accelerazione scalare costante, la velocità scalare v e l'ascissa s della posizione occupata sono espresse in funzione del tempo dalle relazioni

$$v = v_0 + at\,, \qquad s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2\,,$$

dove v_0 e s_0 sono, rispettivamente, la velocità e l'ascissa della posizione all'istante $t = 0$. Infatti:

$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \quad \Rightarrow \quad \int_{v_0}^{v} \mathrm{d}v = \int_0^t a\,\mathrm{d}t \quad \Rightarrow \quad v = v_0 + at\,, \tag{1}$$

$$v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} \quad \Rightarrow \quad \int_{s_0}^{s} \mathrm{d}s = \int_0^t v\,\mathrm{d}t \quad \Rightarrow \quad s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2\,. \tag{2}$$

L'accelerazione del veicolo vale

$$a_1 \quad \text{per } 0 < t \le \tau_1\,; \qquad 0 \quad \text{per } \tau_1 < t \le \tau_1 + \tau_2\,; \qquad a_2 \quad \text{per } \tau_1 + \tau_2 < t \le \tau_2 + \tau_3\,.$$

Dalle equazioni (1) e (2) si ricava ($v_0 = 0$, $s_0 = 0$)

$$\begin{aligned} v &= a_1 t\,, \\ s &= \frac{1}{2}a_1 t^2\,, \end{aligned} \quad \text{per } 0 < t \le \tau_1\,, \qquad \begin{aligned} v &= a_1 \tau_1\,, \\ s &= \frac{1}{2}a_1 \tau_1^2 + a_1\tau_1(t - \tau_1)\,, \end{aligned} \quad \text{per } \tau_1 < t \le \tau_1 + \tau_2\,,$$

mentre, per $\tau_1 + \tau_2 < t \leq \tau_1 + \tau_2 + \tau_3$, si ha

$$v = a_1\tau_1 - a_2[t - (\tau_1 + \tau_2)]\,,$$
$$s = \frac{1}{2}a_1\tau_1^2 + a_1\tau_1\tau_2 + a_1\tau_1[t - (\tau_1 + \tau_2)] - \frac{1}{2}a_2[t - (\tau_1 + \tau_2)]^2\,.$$

a) All'istante $t = \tau_1 + \tau_2 + \tau_3$ la velocità del veicolo si annulla, quindi dalla penultima equazione segue

$$a_1\tau_1 - a_2\tau_3 = 0\,, \qquad \tau_3 = \frac{a_1}{a_2}\tau_1 = 2\,\text{min} = 120\,\text{s}.$$

Lo spazio percorso complessivamente dal veicolo risulta:

$$s(\tau_3) = \frac{1}{2}a_1\tau_1^2 + a_1\tau_1\tau_2 + a_1\tau_1\tau_3 - \frac{1}{2}a_2\tau_3^2 = 13\,\text{km} = 1.3 \times 10^4\,\text{m}.$$

b) Nell'intervallo di tempo $(0, \tau_1)$ la velocità scalare varia linearmente col tempo e, poiché all'istante iniziale è nulla, il suo valore medio in tale intervallo di tempo è $v(\tau_1)/2$; nell'intervallo di tempo $(\tau_1, \tau_1 + \tau_2)$ la velocità resta costante; infine, nell'ultimo intervallo di tempo di ampiezza τ_3, la velocità diminuisce linearmente col tempo fino ad annullarsi, cosicché il corrispondente valore medio è $v(\tau_1)/2$. La velocità media sull'intero percorso è allora:

$$v_m = \frac{\tau_1 v(\tau_1)/2 + \tau_2 v(\tau_1) + \tau_3 v(\tau_1)/2}{\tau_1 + \tau_2 + \tau_3} = 48.75\,\text{km/h}.$$

L'accelerazione media vale

$$a_m = \frac{\tau_1 a_1 - \tau_3 a_2}{\tau_1 + \tau_2 + \tau_3} = 0\,,$$

risultato ovvio perché all'inizio e alla fine il veicolo possiede la stessa velocità (nulla).

Esercizio 34 (Cinematica)

Un'automobile in moto con velocità di modulo v_0 comincia a frenare e, muovendosi di moto rettilineo, si arresta in uno spazio l. Si determini l'accelerazione scalare media a_m di frenamento nei tre casi seguenti:

a) **l'accelerazione scalare ha valore A costante nel tempo;**

b) **l'accelerazione dipende dalla velocità scalare con la legge $a = b(v + v_0)$;**

c) **l'accelerazione varia linearmente nel tempo, $a = \gamma t$.**

Lungo la traiettoria dell'automobile si consideri un sistema di ascisse s, con l'origine nella posizione occupata dal centro dell'automobile al tempo $t = 0$, istante d'inizio della frenata; il verso positivo delle ascisse coincida con quello di moto dell'automobile. Dalle relazioni

$$\mathrm{d}v = a\,\mathrm{d}t\,, \qquad \mathrm{d}s = v\,\mathrm{d}t\,,$$

si possono ricavare le risposte desiderate nei tre casi in esame.

a)

$$\int_{v_0}^{v} \mathrm{d}v = \int_0^t A\,\mathrm{d}t \qquad \Rightarrow \qquad v = v_0 + At\,,$$

$$\int_0^s \mathrm{d}s = \int_0^t (v_0 + At)\,\mathrm{d}t \qquad \Rightarrow \qquad s = v_0 t + \frac{1}{2}At^2\,.$$

Dalla prima delle due precedenti equazioni segue che la velocità dell'automobile si annulla all'istante $t_1 = -v_0/A$ e corrispondentemente, per la seconda delle equazioni, lo spazio di frenata risulta

$$l = v_0 t_1 + \frac{1}{2}At_1^2 = -\frac{v_0^2}{A} + \frac{v_0^2}{2A} = -\frac{v_0^2}{2A}\,,$$

e quindi

$$a_m = A = -\frac{v_0^2}{2l}\,.$$

b)

$$\mathrm{d}v = b(v + v_0)\,\mathrm{d}t\,, \qquad \int_{v_0}^{v} \frac{\mathrm{d}v}{v + v_0} = \int_0^t b\,\mathrm{d}t\,,$$

$$\log_e \frac{v + v_0}{2v_0} = bt\,, \qquad v = v_0(2\mathrm{e}^{bt} - 1)\,;$$

$$\int_0^s \mathrm{d}s = \int_0^t v_0(2\mathrm{e}^{bt} - 1)\,\mathrm{d}t\,, \quad \Rightarrow \quad s = \frac{2v_0}{b}(\mathrm{e}^{bt} - 1) - v_0 t\,.$$

La velocità si annulla all'istante $t_1 = -(\log_e 2)/b$, cosicché lo spazio di frenata è

$$l = \frac{2v_0}{b}(\mathrm{e}^{bt_1} - 1) - v_0 t_1 = -v_0\left(t_1 + \frac{1}{b}\right) = \frac{v_0}{b}(\log_e 2 - 1)\,.$$

Si ricava così:

$$b = \frac{v_0}{l}(\log_e 2 - 1)\,, \qquad t_1 = \frac{l \log_e 2}{v_0(1 - \log_e 2)}\,;$$

$$a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t} = -\frac{v_0}{t_1} = \frac{v_0^2}{l}\,\frac{1 - \log_e 2}{\log_e 2}\,.$$

c)

$$\int_{v_0}^{v} \mathrm{d}v = \int_0^t \gamma t \, \mathrm{d}t \qquad \Rightarrow \qquad v = v_0 + \frac{1}{2}\gamma t^2 ,$$

$$\int_0^s \mathrm{d}s = \int_0^t (v_0 + \frac{1}{2}\gamma t^2) \, \mathrm{d}t \qquad \Rightarrow \qquad s = v_0 t + \frac{1}{6}\gamma t^3 .$$

Di conseguenza, la velocità si annulla all'istante $t_1 = \sqrt{-2v_0/\gamma}$, quindi:

$$l = v_0 t_1 + \frac{1}{6}\gamma t_1^3 = \sqrt{-\frac{8v_0^3}{9\gamma}} .$$

In conclusione, si ha:

$$\gamma = -\frac{8v_0^3}{9l^2} , \qquad t_1 = \frac{3l}{2v_0} , \qquad a_m = -\frac{v_0}{t_1} = -\frac{2v_0^2}{3l} .$$

Esercizio 35 (Cinematica)

Un punto materiale si muove su una circonferenza di raggio $r = 1$ m con moto uniformemente accelerato. Negli intervalli di tempo ($t_0 = 0, t_1 = 1$ s) e ($t_0 = 0, t_2 = 2$ s) il punto percorre gli spazi $C_1 = 0.15$ m e $C_2 = 0.4$ m, rispettivamente. Si calcoli:

a) **l'accelerazione tangenziale a_T e la velocità scalare v_0 all'istante $t = 0$;**

b) **il valore medio v_m del modulo della velocità e quello a_{Tm} del modulo dell'accelerazione tangenziale nell'intervallo di tempo ($t_0 = 0, t_2 = 2$ s);**

c) **la velocità angolare ω e il modulo dell'accelerazione a all'istante t_2.**

a) Si consideri lungo la circonferenza un sistema di ascisse curvilinee s con origine nella posizione occupata dal punto all'istante $t = 0$ e verso concorde a quello del moto del punto. Poiché il moto è uniformemente accelerato, all'istante t valgono le relazioni

$$v(t) = v_0 + a_T t , \qquad s(t) = v_0 t + \frac{1}{2} a_T t^2 .$$

Si hanno le condizioni

$$\begin{cases} s(t_1) = v_0 t_1 + \frac{1}{2} a_T t_1^2 = C_1 = 0.15\,\mathrm{m}, \\ s(t_2) = v_0 t_2 + \frac{1}{2} a_T t_2^2 = C_2 = 0.4\,\mathrm{m}, \end{cases}$$

dalle quali segue

$$a_T = 0.1\,\mathrm{m/s^2}, \qquad v_0 = 0.1\,\mathrm{m/s}.$$

b) Il valore medio v_m del modulo della velocità nell'intervallo di tempo ($t_0 = 0, t_2 = 2\,\mathrm{s}$) risulta

$$v_m = \frac{\text{spazio percorso}}{\text{tempo impiegato}} = 0.2\,\mathrm{m/s}.$$

Per l'accelerazione tangenziale si ha:

$$a_{Tm} = \frac{v(t_2) - v_0}{t_2 - t_0} = \frac{(a_T t_2 + v_0) - v_0}{t_2 - t_0} = a_T = 0.1\,\mathrm{m/s^2}.$$

Dato che il moto avviene con accelerazione tangenziale costante a_T, l'accelerazione media a_{Tm} coincide con a_T.

c) All'istante $t_2 = 2\,\mathrm{s}$ risulta

$$v(t_2) = a_T t_2 + v_0 = 0.3\,\mathrm{m/s}, \qquad \omega(t_2) = \frac{v(t_2)}{r} = 0.3\,\mathrm{rad/s}.$$

Il vettore $\boldsymbol{\omega}$ ha direzione normale al piano del moto e verso tale che una persona disposta parallelamente a $\boldsymbol{\omega}$ vede il punto muoversi in verso antiorario. Si ha, inoltre,

$$a_C = \text{ accelerazione centripeta } = \frac{v^2(t_2)}{r} = 0.09\,\mathrm{m/s^2},$$

e quindi

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{a_C^2 + a_T^2} = 0.13\,\mathrm{m/s^2}.$$

Esercizio 36 (Cinematica)

Un punto materiale A viene lasciato cadere con velocità nulla da un'altezza dal suolo $h_A = 45\,\mathrm{m}$; contemporaneamente, un punto materiale B, situato sulla verticale passante per A ad altezza $h_B = 21\,\mathrm{m}$, viene lanciato verso l'alto con velocità di modulo v_0. Si calcoli, trascurando la resistenza dell'aria:

a) **il valore minimo v_0^* di v_0 per il quale A e B si urtano prima di giungere al suolo;**

b) **la velocità con la quale si urtano i due punti materiali quando $v_0 \geq v_0^*$;**

c) **il valore di v_0 per cui A e B si incontrano alla quota $h_C = 40\,\mathrm{m}$.**

le posizioni di A e B al tempo t sono rispettivamente

$$z_A(t) = h_A - \frac{1}{2}gt^2, \qquad z_B(t) = h_B + v_0 t - \frac{1}{2}gt^2,$$

essendo $t = 0$ l'istante di inizio del moto e g il modulo dell'accelerazione di gravità. La distanza $d(t)$ tra i due punti risulta

$$d(t) = z_A(t) - z_B(t) = h_A - h_B - v_0 t,$$

e quindi l'istante t_1 in cui A e B si urtano è

$$t_1 = \frac{h_A - h_B}{v_0}.$$

Il risultato precedente ha significato se l'urto avviene prima che i due punti giungano al suolo: affinché ciò si verifichi t_1 deve essere inferiore al tempo $t_2 = \sqrt{2h_A/g}$ impiegato da A per arrivare al suolo. Dalla condizione $t_1 < t_2$ si ottiene

$$v_0 > v_0^* = \frac{h_A - h_B}{\sqrt{2h_A/g}} = 8\,\text{m/s}.$$

Nel caso $v_0 = v_0^*$ l'urto avviene al livello del suolo dove A e B arrivano contemporaneamente.

b) Le velocità dei due punti valgono, rispettivamente,

$$v_A(t) = \frac{\mathrm{d}z_A(t)}{\mathrm{d}t} = -gt, \qquad v_B(t) = \frac{\mathrm{d}z_B(t)}{\mathrm{d}t} = v_0 - gt,$$

perciò la velocità di un punto rispetto all'altro è costante nel tempo con modulo uguale a v_0. Quando $v_0 > v_0^*$ la velocità relativa di urto è appunto v_0.

c) Il punto A passa alla quota h_C all'istante

$$t_C = \sqrt{\frac{2(h_A - h_C)}{g}} = 1\,\text{s},$$

e, corrispondentemente, la quota di B risulta

$$z_B(t_C) = h_B + v_0 t_C - \frac{1}{2}gt_C^2 = h_B - h_A + h_C + v_0\sqrt{\frac{2(h_A - h_C)}{g}}.$$

Se si vuole che l'urto avvenga alla quota h_C deve essere $z_B(t_C) = h_C$ e da questa condizione segue:

$$v_0 = \frac{h_A - h_B}{t_C} = 24\,\text{m/s}.$$

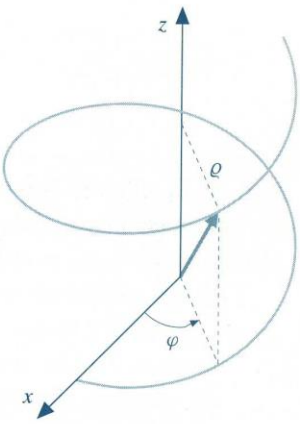
Esercizio 37 (Cinematica)

Una persona sale delle scale a chiocciola partendo dal piano di terra all'istante $t = 0$. La persona si mantiene a distanza costante $r = 2$ m dall'asse centrale delle scale e ogni secondo sale uno scalino alto $h = 20$ cm e profondo $d = 20$ cm. Per studiare il moto della persona si adoperi:

a) **un sistema di coordinate cartesiane ortogonali;**

b) **un sistema di coordinate cilindriche.**

Si ricavino nei due casi le equazioni della traiettoria, la legge oraria e le componenti della velocità in funzione del tempo.



PROBLEMA 1-27

a) Si consideri un sistema di coordinate cartesiane con l'asse z coincidente con l'asse centrale delle scale e orientato verso l'alto e l'asse x nel piano di terra e passante per la posizione occupata dalla persona all'istante $t = 0$ (v. figura). La proiezione della persona sull'asse z si sposta con velocità costante $v_z = 20\,\mathrm{cm/s}$, la proiezione sul piano xy si muove di moto circolare uniforme con velocità $v_{xy} = 20\,\mathrm{cm/s}$ e velocità angolare $\omega = v_{xy}/r = 0.1\,\mathrm{rad/s}$. La traiettoria della persona è quindi un'elica cilindrica di passo costante $p = 4\pi$ m. Le coordinate della posizione della persona variano nel tempo con le leggi

$$x(t) = r\cos\omega t\,, \qquad y(t) = r\,\mathrm{sen}\,\omega t\,, \qquad z(t) = v_z t\,,$$

e le equazioni della traiettoria sono

$$x = r\cos\frac{\omega z}{v_z}\,, \qquad y = r\,\mathrm{sen}\,\frac{\omega z}{v_z}\,.$$

Le componenti della velocità risultano

$$v_x(t) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -v_{xy}\,\mathrm{sen}\,\omega t\,, \qquad v_y(t) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = v_{xy}\cos\omega t\,, \qquad v_z(t) = v_z\,,$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = 20\sqrt{2}\,\mathrm{cm/s} = 0.28\,\mathrm{m/s}\,.$$

Il modulo della velocità è costante nel tempo perciò, considerato lungo la traiettoria un sistema di ascisse curvilinee s con origine nella posizione iniziale della persona, si ha $s(t) = vt$.

b) Gli assi z e x della precedente terna cartesiana siano l'asse z e l'asse di riferimento per la latitudine φ del sistema di coordinate cilindriche ρ, φ, z. Si ha

$$\rho(t) = r\,, \qquad \varphi(t) = \omega t\,, \qquad z(t) = v_z t\,,$$

$$v_\rho(t) = 0\,, \qquad v_\varphi(t) = v_{xy}\,, \qquad v_z(t) = v_z\,,$$

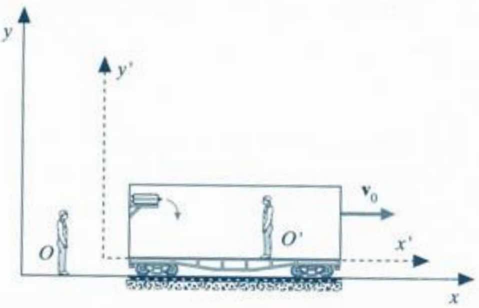
e le equazioni della traiettoria sono

$$\rho = r\,, \qquad \varphi = \frac{\omega z}{v_z}\,.$$

Esercizio 38 (Cinematica)

Un treno in moto rettilineo uniforme con velocità di modulo $v_0 = 90\,\mathrm{km/h}$ rallenta bruscamente con decelerazione costante di modulo $A = 2\,\mathrm{m/s}$: come conseguenza, una valigia, posata in bilico sul portapacchi, cade e finisce sul pavimento del treno. Si determini la traiettoria descritta dalla valigia come appare a un osservatore O fermo a terra e a uno O' sul treno.

Si consideri un sistema di riferimento S solidale a terra, con l'asse x nella direzione di moto del treno e l'asse y diretto verso l'alto, e un sistema S' solidale al treno, con gli assi x', y' paralleli ai due assi precedenti (v. figura). La velocità $\mathbf{v}$ della valigia nel sistema S è legata alla velocità $\mathbf{v}'$ nel sistema S' dalla relazione:



$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{v}_{tr}\,, \qquad (1)$$

dove $\mathbf{v}_{tr} = \mathbf{v}_0$ è la velocità di trascinamento. Poiché il moto relativo dei due sistem traslatorio, una relazione analoga vale tra le accelerazioni

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}' + \mathbf{a}_{tr}\,,$$

con $\mathbf{a}_{tr} = \mathbf{A}$. Durante la caduta la valigia conserva lungo l'asse x la velocità iniziale v_0 c treno (non essendo più a contatto con le pareti del treno, non risente ulteriormente de frenata), mentre il suo moto lungo l'asse y è naturalmente accelerato. Quindi nel sistema riferimento S, considerando l'asse y passante per la posizione occupata dalla valigia all'istan $t = 0$ in cui inizia la frenata, le coordinate della valigia risultano

$$x = v_0 t\,, \qquad y = h - \frac{1}{2}gt^2\,,$$

dove h rappresenta l'altezza del portapacchi dal suolo. Si ricava:

$$y = h - \frac{1}{2}g\frac{x^2}{v_0^2}\,.$$

L'osservatore O vede quindi descrivere dalla valigia un arco di parabola: il moto si interromp quando la valigia raggiunge il pavimento del treno.

Nel sistema di riferimento S' la velocità della valigia all'istante $t = 0$ è zero, mentre l'accelerazione, come si deduce dalla (2), è $\mathbf{a}' = \mathbf{g} - \mathbf{A}$. Da quest'ultima relazione si ricava:

$$\frac{\mathrm{d}^2x'}{\mathrm{d}t^2} = A\,, \qquad \frac{\mathrm{d}^2y'}{\mathrm{d}t^2} = -g\,,$$

$$x' = \tfrac{1}{2}At^2\,, \qquad y' = -\tfrac{1}{2}gt^2 + h\,,$$

e quindi

$$y' = h - \frac{g}{A}x'\,.$$

L'osservatore O' vede descrivere dalla valigia una traiettoria rettilinea.

Esercizio 39 (Cinematica)

Un carro si muove su un piano orizzontale con moto rettilineo uniforme e modulo della velocità $V = 50.4\,\mathrm{km/h}$. All'interno del carro, ad altezza $h = 1.8\,\mathrm{m}$ dal pavimento, una pallina viene lanciata in direzione orizzontale, verso opposto a quello di moto del carro e velocità relativa al carro di modulo $|\mathbf{v}_0| = 6\,\mathrm{m/s}$. Si calcoli:

a) **la velocità assoluta (cioè rispetto a terra) $\mathbf{v}_A$ della pallina al momento del lancio;**

b) **il tempo τ impiegato dalla pallina per arrivare sul pavimento del carro e le gittate relativa G_R e assoluta G_A;**

c) **i moduli delle velocità assoluta e relativa della pallina all'istante di urto sul pavimento del carro e gli angoli φ_A e φ_R che dette velocità formano con l'orizzontale.**

(Si usi il valore approssimato $g = 10\,\mathrm{m/s^2}$.)

Si consideri un sistema di riferimento cartesiano con l'asse x diretto e orientato secondo il moto del carro e l'asse y diretto verso l'alto. Sia $t = 0$ l'istante di lancio della pallina.

a) Dalla relazione $\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_R + \mathbf{v}_{tr}$ tra la velocità assoluta, la velocità relativa e quella di trascinamento, applicata all'istante di lancio, segue

$$v_A = -v_0 + V = 8\,\mathrm{m/s},$$

quindi rispetto a terra la pallina si muove concordemente al carro ma con velocità minore.

b) La pallina cade con accelerazione $\mathbf{g}$ e la componente verticale della velocità iniziale è nulla, perciò:

$$\tau = \sqrt{\frac{2h}{g}} = 0.6\,\mathrm{s}.$$

Durante la caduta la proiezione sull'asse x della posizione della pallina si muove con velocità costante, quindi

$$G_R = v_0\tau = -3.6\,\mathrm{m}, \qquad G_A = v_A\tau = 4.8\,\mathrm{m}.$$

Si noti che la differenza tra la gittata assoluta e quella relativa è lo spazio percorso dal carro nel tempo τ.

c) All'istante τ di arrivo della pallina sul pavimento, le componenti secondo gli assi x e y della velocità assoluta $\mathbf{v}_A(\tau)$ e della velocità relativa $\mathbf{v}_R(\tau)$ sono:

$$v_{Ax}(\tau) = 8\,\mathrm{m/s}, \qquad v_{Ay}(\tau) = -g\tau = -6\,\mathrm{m/s},$$

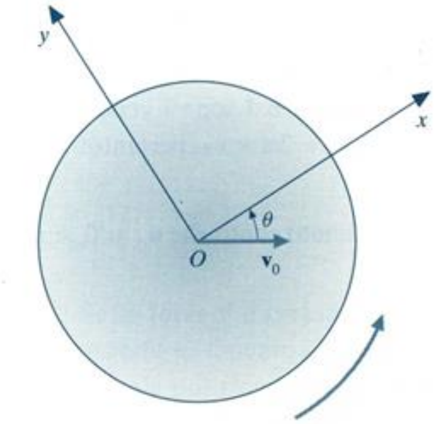
$$v_{Rx}(\tau) = -6\,\mathrm{m/s}, \qquad v_{Ry}(\tau) = v_{Ay}(\tau) = -6\,\mathrm{m/s}.$$

Pertanto:

$$\begin{aligned}
v_A(\tau) &= \sqrt{v_{Ax}^2(\tau) + v_{Ay}^2(\tau)} = 10\,\mathrm{m/s},\\
v_R(\tau) &= \sqrt{v_{Rx}^2(\tau) + v_{Ry}^2(\tau)} = 6\sqrt{2}\,\mathrm{m/s},\\
\tan\varphi_A &= \frac{v_{Ay}(\tau)}{v_{Ax}(\tau)} = -\frac{3}{4}, \qquad \varphi_A = 323^\circ,\\
\tan\varphi_R &= \frac{v_{Ry}(\tau)}{v_{Rx}(\tau)} = 1, \qquad \varphi_R = 225^\circ.
\end{aligned}$$

Esercizio 40 (Cinematica)

Una piattaforma ruota con velocità angolare costante ω intorno a un asse centrale verticale. All'istante $t = 0$, una pallina viene lanciata orizzontalmente con velocità $\mathbf{v}_0$ dal centro della piattaforma; l'attrito che la pallina incontra è trascurabile, cosicché essa si muove rispetto a terra di moto rettilineo uniforme con velocità $\mathbf{v}_0$. Si determini l'accelerazione della pallina, a un generico istante, rispetto a un riferimento solidale alla piattaforma.



Si consideri un sistema di riferimento (X, Y) solidale al piano della piattaforma, con l'origine nel centro della piattaforma e con l'asse X che all'istante $t = 0$ di lancio della pallina è parallelo e concorde a $\mathbf{v}_0$. All'istante t l'asse X forma un angolo $\theta = \omega t$ con la direzione di $\mathbf{v}_0$ (v. figura). Le coordinate X, Y della pallina che, rispetto a terra, ha percorso un tratto di lunghezza $v_0 t$, sono quindi

$$X = v_0 t \cos \omega t \,, \qquad Y = -v_0 t \operatorname{sen} \omega t \,.$$

Derivando rispetto al tempo queste due equazioni si ha:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} &= v_0 \cos \omega t - v_0 \omega t \operatorname{sen} \omega t \,, \\ \frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}t} &= -v_0 \operatorname{sen} \omega t - v_0 \omega t \cos \omega t \,; \end{aligned}$$

derivando ulteriormente si ottengono le componenti dell'accelerazione relativa

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}^2X}{\mathrm{d}t^2} &= -2 v_0 \omega \operatorname{sen} \omega t - v_0 \omega^2 t \cos \omega t \,, \\ \frac{\mathrm{d}^2Y}{\mathrm{d}t^2} &= -2 v_0 \omega \cos \omega t + v_0 \omega^2 t \operatorname{sen} \omega t \,, \end{aligned} \tag{1}$$

e quindi il modulo dell'accelerazione relativa risulta:

$$a_R = \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}^2X}{\mathrm{d}t^2}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}^2Y}{\mathrm{d}t^2}\right)^2} = v_0 \omega \sqrt{4 + \omega^2 t^2} \,.$$

Come verifica, risolviamo nuovamente il problema utilizzando la relazione $\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_R + \mathbf{a}_{tr} + \mathbf{a}_{Co}$ tra l'accelerazione assoluta, l'accelerazione relativa, l'accelerazione di trascinamento e quella di Coriolis.

L'accelerazione di trascinamento è l'accelerazione del punto della piattaforma nella posizione in cui si trova la pallina, cioè è l'accelerazione centripeta

$$\mathbf{a}_{tr} = -\omega^2 \mathbf{r} = -\omega^2 (X\mathbf{I} + Y\mathbf{J}) \,,$$

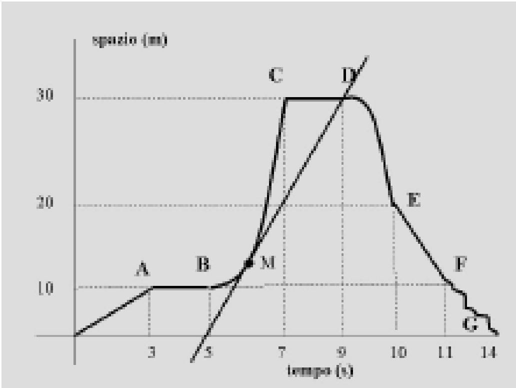
dove $\mathbf{I}$ e $\mathbf{J}$ sono i versori degli assi X e Y, rispettivamente. L'accelerazione di Coriolis è $\mathbf{a}_{Co} = 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_R$, pertanto:

$$\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_R - \omega^2 \mathbf{r} + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_R \,.$$

Tenuto conto che $\mathbf{a}_A = 0$, si ritrovano facilmente le (1).

Esercizio 41 (Cinematica)

- *Si consideri il seguente grafico orario spazio-tempo. Per ogni tratto si deducano tutte le informazioni possibili. Si calcoli la velocità istantanea nel punto M, la velocità media tra A e C e su tutto il percorso.*



RISPOSTA:

OA)

Il grafico orario é una retta quindi il moto é rettilineo uniforme. La velocità é costante in tutti i punti e il suo valore lo si ottiene dal rapporto tra le coordinate del punto A

$v = \Delta s / \Delta t = 10 \text{ m} / 3 \text{ s} = 3{,}33 \text{ m/s}$

Tale valore é il coefficiente angolare della retta passante per O e A

AB)

Ripetendo il ragionamento di cui sopra, si ottiene che la velocità nel tratto AB é nulla. Infatti il valore dello spazio S percorso rimane costante in tutto l'intervallo di tempo tra 3 e 5 secondi.

BC)

Il grafico orario é un ramo di parabola. Il moto é allora rettilineo uniformemente accelerato e la velocità cambia modulo in ogni punto. Posso calcolarne il valore medio, considerando il segmento che unisce i punti B e C.

$v_{media} = (30 - 10) \text{ m} / (7 - 5) \text{ s} = 10 \text{ m/s}$

Pe determinare la velocità istantanea in M mi riconduco al calcolo della velocità media tra M ed un punto immediatamente vicino. Per valori di Δt che tendono a zero questi due punti tenderanno a coincidere, e la retta passante per essi si avvicinerà sempre più alla retta tangente alla curva in M. Tutti i triangoli rettangoli che hanno un vertice in M e l'ipotenusa coincidente con la direzione di tale retta tangente, sono simili. Il rapporto tra due cateti è costante e uguale al valore cercato della velocità istantanea. Considero, allora, uno di questi triangoli simili che sia sufficientemente grande e che mi renda agevole il conto:

$v_{iM} = \Delta S/\Delta t = (25\text{-}0)\text{m}/(9\text{-}3)\text{s} = 25/6 \text{ m/s} = 4{,}17 \text{ m/s}$

CD)

L'oggetto è fermo.

DE)
Il grafico orario é un arco di parabola. Il moto é rettilineo uniformemente accelerato con velocità negativa. L'oggetto torna verso l'origine degli assi:

$$v_{media} = \Delta S/\Delta t = (20 - 30)m / (10 - 9)s = - 10 m/s$$

EF)
L'oggetto continua il suo moto di avvicinamento all'origine. La velocità è quindi negativa e di valore costante perché in questo tratto il grafico orario è una retta.

$$v = - 10 m / 1 s = - 10 m/s$$

FG)
In questo tratto il moto è vario. Velocità ed accelerazione cambiano istante per istante. In G l'oggetto è tornato al punto di partenza.

Si chiede, inoltre, di determinare la velocità media (scalare) tra A e C. Dalla definizione:

$$v_{AC} = 30/7 m/s = 4,29 m/s$$

Su tutto il percorso, si ha:

$$v_{AG} = 60 m / 14 s = 4,29 m/s$$

I due valori coincidono solo per caso. Se, invece, volessi calcolare la velocità vettoriale su tutto il cammino, otterrei un valore nullo perché il punto in moto ritorna in G al punto di partenza e il suo spostamento totale é nullo.

Il calcolo della velocità istantanea in M viene eseguito tracciando la retta tangente al grafico e considerando il suo coefficiente angolare

$m = tg\ \alpha = (30 – 0)$ metri / $(9 – 5)$secondi

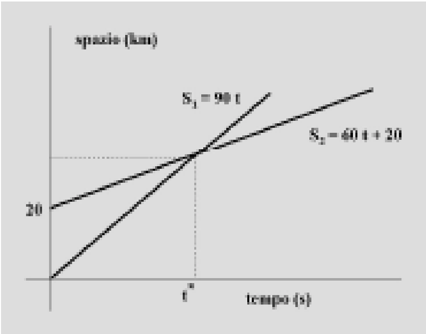
$v_{ist} = 30/4\ m/s = 7,5\ m/s$

Esercizio 42 (Cinematica)

- *Due auto si muovono di moto rettilineo uniforme con velocità date da $v_1 = 90$ km/h e $v_2 = 60$ km/h. La seconda auto parte con un vantaggio di 20 km. Dopo quanto tempo l'auto più veloce raggiunge quella più lenta?*

RISPOSTA:

Rappresentiamo in un piano cartesiano spazio-tempo le leggi orarie dei due oggetti in moto.



Le due curve hanno le seguenti equazioni di moto:

$S_1 = 90\,t \qquad S_2 = 60\,t + 20$

Nel punto di intersezione l'auto più veloce avrà raggiunto quella più lenta perchè lo spazio S percorso da entrambe avrà lo stesso valore: $S_2 = S_1$. Per ricavare il valore t* in cui ciò avviene é sufficiente mettere a sistema le due equazioni: sostituendo la prima nella seconda si ottiene

$S = 60\,S/90 + 20$

$1/3\,S = 20 \qquad S = 60$ km

Il punto in cui si incontrano le due auto é a 60 km dall'origine. Sostituendo questo valore in una qualunque delle due equazioni si ha:

$t = 2/3$ h = 40 min.

DINAMICA DEL PUNTO MATERIALE

Principi della dinamica

I tre principi della dinamica di una particella (punto materiale) sono:

1) principio di interzia di Galilei;
2) legge dinamica di Newton;
3) principio di azione e reazione.

Il principio di interzia di Galilei afferma che una particella libera, cioè non sottoposta all'azione di altre particelle, si muove di moto rettilineo uniforme. Quindi la sua velocità è tale che

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0$$

dove $\vec{v}_0$ è un vettore costante. Il vettore costante $\vec{v}_0$ può essere nullo ed in questo caso si dice che la particella è in quiete.

La legge dinamica di Newton afferma che nel generico moto di una particella, l'accelerazione istantanea della particella può essere al più una funzione dalla posizione della particella e dalla velocità istantanea della particella. Cioè si ha

$$\vec{a} = \vec{\Phi}(\vec{r}, \vec{v})$$

dove $\vec{\Phi}$ indica la funzione da cui dipende l'accelerazione.

Se m è la massa della particella, la grandezza vettoriale

$$\vec{F}(\vec{r}, \vec{v}) = m\vec{\Phi}(\vec{r}, \vec{v})$$

è detta forza che agisce sulla particella. In questo modo la legge della dinamica si può scrivere nella forma familiare

$$\vec{F} = m\vec{a} \, .$$

La forza si misura in Newton (N), dove 1 N = 1 Kg m/s^2.

Dalla legge di interzia e dalla legge dinamica di Newton si
deduce che per una particella libera, la cui accelerazione è nulla,
deve essere nulla la forza agente sulla particella:

$$\vec{a} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{F} = \vec{0} \, .$$

Va notato che la forza agente su una particella può essere la somma vettoriale di forze diverse che agiscono sulla particella.

Cioè, se $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots, \vec{F}_N$ sono le N forze che agiscono sulla particella, la forza risultante sarà

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots + \vec{F}_N .$$

Ed è questa la forza risultante che determina il moto della particella.

Il <u>principio di azione e reazione</u> afferma che date due particelle la forza $\vec{F}_{12}$ che agisce sulla prima particella a causa della seconda particella è uguale e contraria alla forza $\vec{F}_{21}$ che agisce sulla seconda particella a causa della prima particella. Ovverosia:

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} .$$

Questo principio a volte si enuncia dicendo che "ad ogni azione corrisponde una reazione uguale e contraria".

Oss. Anche se la somma vettoriale delle due forze è zero ciò non significa che le due particelle siano ferme. Inoltre se le due particelle hanno masse diverse anche le loro accelerazioni saranno diverse.

Forze agenti su una particella

La dinamica di una particella è determinata dalle legge di Newton

$$\vec{F} = m\vec{a} .$$

Ciò significa che conoscendo l'andamento funzionale della forza, la legge di Newton si scrive

$$\vec{F}(\vec{r}, \vec{v}) = m\vec{a} .$$

ovverosia

$$\vec{F}(\vec{r},\frac{d\vec{r}}{dt}) = m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \ .$$

In generale si deve quindi risolvere un sistema di 3 equazioni differenziali ordinarie del secondo ordine per determinare la legge oraria $\vec{r}(t)$ della particella.

Consideriamo alcuni semplici casi.

Forza nulla

Dato che la forza è nulla anche l'accelerazione è nulla e quindi la particella si muove di moto rettilineo uniforme oppure è in quiete. È questo il caso di una particella libera (non ci sono forze agenti) oppure di una particella in equilibrio (la somma vettoriale delle forze agenti è zero).

Cioè, come già scritto si ha

$$\vec{F} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0} \ .$$

Forza peso

Se la forza è costante anche l'accelerazione è costante e quindi la particella si muove di moto uniformemente accelerato.

È questo il caso della forza peso, che ora analizziamo.

La forza peso è la forza a cui è soggetta una particella in caduta libera nel vuoto. Essa è data da

$$\vec{F} = m\vec{g}$$

dove m è la massa della particella mentre $\vec{g}$ è un vettore noto come accelerazione di gravità, diretto verso il centro della terra ed il cui modulo vale circa

$g = 9.81\ m/s^2$.

Dunque l'intensità della forza peso è proporzionale alla massa del corpo. Nel linguaggio parlato spesso le parole "peso" e "massa" vengono considerate sinonimi.

Es. Se una particella è in caduta libera nel vuoto su di essa agisce la sola forza peso $\vec{F} = m\vec{g}$ e quindi dalla legge di Newton

$$m\vec{g} = m\vec{a}$$

si ricava l'accelerazione, che è l'accelerazione di gravità:

$$\vec{a} = \vec{g} = (0,0,-g) .$$

Si tratta di una moto uniformemente accelerato.
Se inoltre la particella parte da ferma da un'altezza h, la sua posizione nel tempo lungo l'asse verticale z risulta data da

$$z(t) = h - \frac{1}{2} g t^2 \quad ,$$

con z = 0 quando la particella tocca il suolo.
Mentre l'equazione della velocità lungo z è data da

$$v_z(t) = -gt .$$

Forza elastica

La forza elastica è la forza che segue la seguente legge, nota come legge di Hooke:

$$\vec{F} = -K\vec{r} ,$$

dove $\vec{r}$ è la posizione della particella sulla quale agisce la forza e K è una costante, detta costante elastica.

Essa è detta forza elastica perché è la forza esercitata da un elastico o una molla per piccole deformazioni. La forza elastica è una forza di richiamo perché ha sempre segno opposto alla deformazione e tende a riportare l'elastico o la molla nello stato di riposo.

Es. Se una particella di massa m è sottoposta all'azione di una forza elastica lungo l'asse delle ascisse, da Newton si ricava

$$-K(x,0,0) = m\vec{a}$$

ovvero

$$\vec{a} = (-\frac{k}{m}x, 0, 0) \ .$$

Dato che

$$\vec{a} = (\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}, \frac{d^2z}{dt^2})$$

il moto lungo y e z è rettilineo uniforme mentre lungo x si ha

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0 \ .$$

Questa è l'equazione differenziale di un moto armonico, la cui pulsazione (frequenza angolare) è data da

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \ .$$

Forza di reazione vincolare

La forza di reazione vincolare è la forza esercitata da una superficie solida su una particella a contatto con la superficie.

La forza di reazione vincolare $\vec{F}$, essendo un vettore, si può pensare come la somma vettoriale di

una forza di reazione $\vec{T}$ tangente (parallela) alla superficie ed

una forza di reazione $\vec{N}$ normale (perpendicolare) alla superficie:

$$\vec{F} = \vec{T} + \vec{N} \ .$$

La forza $\vec{N}$ di reazione normale alla superficie è sempre tale da impedire il moto della particella nella direzione normale (entrante) alla superficie, se la superficie non si deforma o spezza.

La forza $\vec{N}$ di reazione tangente alla superficie è anche detta forza di attrito. Per essa si distinguono due casi:

i) superficie liscia (o vincolo liscio): $\vec{T} = \vec{0}$

ii) superficie scabra (o vincolo scabro): $\vec{T} \neq \vec{0}$.

Dagli esperimenti si trova che la forza di attrito $\vec{T}$ agente su una particella che si muove su una superficie solida scabra è data da

$$\vec{T} = -\mu N \vec{u}_v$$

dove μ è un coefficiente, detto coefficiente di attrito, N è il modulo della forza normale alla superficie solida agente sulla particella, $\vec{u}_v = \vec{v} / |\vec{v}|$ è il vettore di lunghezza unitaria con $\vec{v}$ velocità della particella che si muove sulla superficie.

Il coefficiente μ è diverso a seconda che si la particella parta da ferma (attrito statico μ_s) o sia già in moto (attrito dinamico μ_d , con $\mu_d < \mu_s$).

Es. Le forze agenti su una particella ferma su un piano orizzontale sono:

1) forza peso $\vec{F}_p = m\vec{g} = (0,0,-mg)$
2) forza di reazione vincolare $\vec{F}_r = (0,0,mg)$.

La forza peso è perpendicolare al tavolo e la forza di reazione vincolare è uguale e contraria alla forza peso.

Oss. Nel caso di un piano inclinato la particella si muove se la forza di reazione vincolare non riesce a controbilanciare la forza peso.

Forza di attrito in un fluido

La forza di attrito in un fluido (gas o liquido) è la forza esercitata dal fluido su una particella che si muove con una velocità $\vec{v}$ all'interno del fluido. La forza è data da

$$\vec{F} = -k\vec{v}$$

dove k è un coefficiente, detto coefficiente di attrito viscoso, che dipende dalla forma del corpo e dalla natura del fluido.

Si osservi che questa espressione per la forza di attrito viscoso è valida se la particella si muove a bassa velocità. A velocità altre la dipendenza dalla velocità non è più lineare.

Nel caso di una sfera di raggio R che si muove in un fluido Stokes ha dimostrato che il coefficiente di attrito viscoso è dato dalla seguente formula

$$k = 6\pi R\eta$$

dove η è un coefficiente noto come viscosità del fluido.
Una semplice analisi dimensionale mostra che la viscosità si misura in Ns/m^2.

Legge di gravitazione universale e forza peso

Attualmente si ritiene che vi siano 4 forze fondamentali che che tutte le proprietà della materia possano essere dedotte a partire a queste forze. Esse sono:

a) forza gravitazionale;
b) forza elettromagnetica;
c) forza nucleare forte;
d) forze nucleare debole.

La forza gravitazionale è responsabile della forza peso. Questo fatto può essere spiegato a partire dalla legge di gravitazione universale di Newton, la quale da conto anche delle orbite dei pianeti del sistema solare.

La legge di gravitazione universale afferma che due corpi di massa m_1 ed m_2 si attraggono con una forza, detta forza di gravità, la cui intensità è data da

$$F = G\frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} \quad ,$$

dove r è la distanza tra i due corpi e $G = 6{,}67\times 10^{-11}$ N m^2/kg^2
è una costante nota come costante di gravitazione universale.

Nel caso in cui m_1 sia la massa della terra, m_2 sia la massa di un corpo sulla superficie della terra ed R sia il raggio medio della terra, la forza agente sul corpo di massa m sarà

$$F = G\frac{m_1 \cdot m_2}{R^2} = m_2\left(G\frac{m_1}{R^2}\right) = m_2 g \quad ,$$

dove la costante g, che ha le dimensioni di una accelerazione, risulta essere pari a

$g = 9.81\ m/s^2$.

Si tratta cioè della accelerazione di gravità, e la forza di gravitazione universale risulta essere la forza peso agente sul corpo di massa m_2.

Impulso e quantità di moto

Data la forza $\vec{F}$ e l'intervallo di tempo infinitesimo dt, si dice impulso infinitesimo della forza la seguente grandezza vettoriale:

$$d\vec{I} = \vec{F}\, dt \quad .$$

Se si considera un intervallo di tempo finito dal tempo t_0 al tempo t_1 l'impulso della forza nell'intervallo di tempo risulta

$$\vec{I} = \int_{t_0}^{t_1} \vec{F}\, dt \quad .$$

E' chiaro che se la forza non dipende dal tempo l'impulso è dato dalla relazione

$$\vec{I} = \vec{F}\,(t_1 - t_0) = \vec{F}\,\Delta t \quad .$$

L'impulso si misura in Ns = Kg m/s.

Data una particella di massa m e velocità $\vec{v}$, la sua quantità di moto è la grandezza vettoriale definita come

$$\vec{p} = m\vec{v} \quad .$$

La quantità di moto si misura in Kg m/s = N s.

Si vede dunque che l'impulso e la quantità di moto hanno le stesse dimensioni fisiche. Ciò non deve stupire, infatti

$$d\vec{I} = \vec{F}\,dt = m\vec{a}\,dt = m\frac{d\vec{v}}{dt}dt = m\,d\vec{v} = d(m\vec{v}) = d\vec{p} \quad .$$

Integrando nell'intervallo di tempo risulta:

$$\vec{I} = \int_{t_0}^{t_1} \vec{F}\,dt = \int_{t_0}^{t_1} d(m\vec{v}) = m\vec{v}(t_1) - m\vec{v}(t_0) = \Delta\vec{p}$$

cioè l'impulso della forza agente su una particella è uguale alla variazione della sua quantità di moto (teorema dell'impulso).

Il secondo principio della dinamica, cioè la legge dinamica di Newton, dato da

$$\vec{F} = m\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt} \ ,$$

si può anche scrivere come

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

dove $\vec{p} = m\vec{v}$ è la quantità di moto, supponendo che la massa non dipenda dal tempo. In effetti, scritto in quest'ultima forma, il secondo principio della dinamica risulta valido anche nel caso di oggetti con massa variabile, ad esempio i razzi.

Momento di una forza e momento angolare

Data la forza $\vec{F}$ ed il raggio vettore $\vec{r} = OP$, si dice momento della forza applicata nel punto P rispetto all'origine O, la seguente grandezza vettoriale:

$$\vec{M} = \vec{r} \wedge \vec{F} \ .$$

Data una particella di quantità di moto $\vec{p}$ che si trova nella posizione $\vec{r} = OP$, si dice momento angolare della particella nel punto P rispetto all'origine O, la seguente grandezza vettoriale:

$$\vec{L} = \vec{r} \wedge \vec{p} \ .$$

Tra le due grandezze vettoriali introdotte c'è una relazione. Se $\vec{F}$ è la forza agente su una particella di quantità di moto $\vec{p}$ si ha

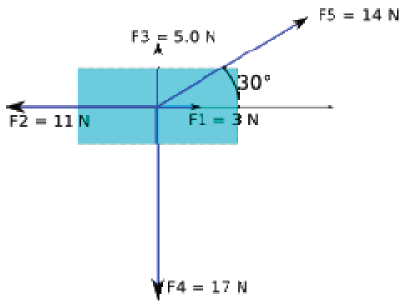
$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \wedge \vec{p}) = \frac{d\vec{r}}{dt} \wedge \vec{p} + \vec{r} \wedge \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{v} \wedge m\vec{v} + \vec{r} \wedge \vec{F} = \vec{0} + \vec{M}$$

ed in definitiva si ottiene (teorema del momento angolare):

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} \ .$$

Esercizio 43 (Dinamica del punto materiale)

Cinque forze agiscono sulla scatola in figura di massa $2.0\,kg$. Trovare la sua accelerazione nella sua notazione vettoriale e in intensità e direzione.



Soluzione:: L'accelerazione ha la stessa direzione della forza risultante. Calcoliamo prima la forza risultante dalla somma delle cinque forze assegnate. Esprimiamo le cinque forze secondo le loro componenti lungo gli assi coordinati

$$\begin{aligned} F_1 &= 3.0\vec{i} \\ F_2 &= -11\vec{i} \\ F_3 &= 5.0\vec{j} \\ F_4 &= -17\vec{j} \\ F_5 &= 12.1\vec{i} + 7.0\vec{j} \end{aligned}$$

La risultante sarà pertanto

$$\vec{R} = (3.0 - 11 + 12.1)\,\vec{i} + (5.0 - 17 + 7.0)\,\vec{j} = 4.1\vec{i} - 5.0\vec{j}$$

La forza risultante ha intensità

$$R = \sqrt{4.1^2 + (-5.0)^2} = 6.5\,N$$

formante un angolo $\alpha = \arctan\left(\frac{-5.0}{4.1}\right) = -50°$ con l'asse orizzontale. L'accelerazione ha la stessa direzione della forza intensità

$$a = \frac{F}{m} = \frac{6.5}{2.0} = 3.25\,\frac{m}{s^2}$$

Le sue componenti saranno

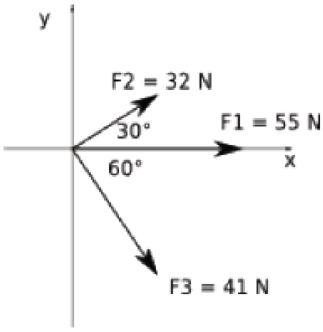
$$\begin{aligned} a_x &= 3.25 \cdot \cos(-50°) = 2.0 \\ a_y &= 3.25 \cdot \sin(-50°) = -2.5 \end{aligned}$$

da cui

$$\vec{a} = 2.0\,\vec{i} - 2.5\,\vec{j}$$

Esercizio 44 (Dinamica del punto materiale)

Tre astronauti, muniti di zaino a razzo, spingono e guidano un asteroide di $120\,kg$ esercitando le forze indicate in figura. Trovare l'accelerazione dell'asteroide in notazione per vettori unitari e in intensità e direzione.



Soluzione:: esercizio un poco «fantascientifico». In ogni caso, per determinare l'accelerazione è necessario conoscere la forza risultante. Trattandosi di angoli di 30° e 60°, cioè angoli che si riferiscono a triangoli equilateri e alle loro metà, è possibile calcolare le componenti verticali ed orizzontali delle forze anche senza l'ausilio delle funzioni goniometriche.

$$\begin{array}{lcllcl} F_{1x} & = & 55\,N & F_{1y} & = & 0 \\ F_{2x} & = & 27.7\,N & F_{2y} & = & 16\,N \\ F_{3x} & = & 20.5\,N & F_{3y} & = & -35.5\,N \end{array}$$

La risultante sarà pertanto

$$\overrightarrow{R} = (55 + 27.7 + 20.5)\,\overrightarrow{i} + (16 - 35.5)\,\overrightarrow{j} = 103.2\overrightarrow{i} - 19.5\overrightarrow{j}$$

L'accelerazione sarà data da

$$\overrightarrow{a} = \frac{\overrightarrow{R}}{m} = 0.86\overrightarrow{i} - 0.16\overrightarrow{j}$$

l'intensità dell'accelerazione sarà

$$a = \sqrt{0.86^2 + (-0.16)^2} = 0.87\,\frac{m}{s^2}$$

la direzione

$$\alpha = \arctan\frac{-0.16}{0.86} = -10.5°$$

Esercizio 45 (Dinamica del punto materiale)

Un viaggiatore con massa di $75\,kg$ lascia la Terra. Calcolare il suo peso sulla Terra, su Marte, dove $g = 3.8\,m/s^2$, e nello spazio interplanetario, dove $g = 0$. Qual è la massa in questi tre luoghi?

Soluzione:: Il peso di un corpo è espresso da $P = mg$, dove m è la sua massa e g l'accelerazione di gravità riferita al luogo. Il peso sulla Terra sarà pertanto

$$P_{Terra} = 75\,kg \cdot 9.8\,\frac{m}{s^2} = 735\,N$$

Il peso su Marte sarà

$$P_{Marte} = 75\,kg \cdot 3.8\,\frac{m}{s^2} = 285\,N$$

Il peso nello spazio interplanetario sarà nullo. La massa, come si vede anche applicando la relazione, rimane in ogni caso invariata e pari a $75\,kg$.

Exercise 2.6. Un corpo puntiforme pesa $22\,N$ in un luogo dove l'accelerazione di gravità è $9.8\,m/s^2$. Trovare il suo peso e la sua massa in un altro luogo, dove l'accelerazione di gravità è di $4.9\,m/s^2$; trovare infine il suo peso e la sua massa se è trasportato in un punto dello spazio dove l'accelerazione di gravità è nulla.

Soluzione:: Questo esercizio si basa sulla corretta comprensione del diverso significato di massa e peso di un corpo; la massa è una grandezza caratteristica e costante, il peso è relativo all'oggetto che attrae esercitando una forza. Pertanto, possiamo calcolare la massa del corpo puntiforme dai dati relativi alla terra

$$m = \frac{P}{g} = \frac{22\,N}{9.8\,\frac{m}{s^2}} = 2.2\,kg$$

tale massa rimane costante in tutti i casi richiesti. Al contrario il peso è legato all'accelerazione che la forza produce, per cui

$$P_1 = mg_1 = 2.2 \cdot 4.9\,\frac{m}{s^2} = 11\,N$$

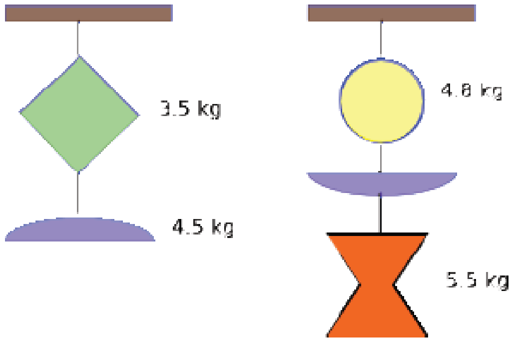
Come si può notare, essendo il peso proporzionale all'accelerazione di gravità, si può calcolare anche così

$$\frac{P}{P_1} = \frac{g}{g_1}$$

da cui, essendo $g = 2g_1$, si avrà $P_1 = \frac{P}{2} = 11\,N$. Nel caso in cui l'accelerazione di gravità si annulla (dove?) il peso dell'oggetto si annulla.

Esercizio 46 (Dinamica del punto materiale)

Un oggetto da ornamento sospeso al soffitto è formato da due pezzi di metallo, uniti da fili di massa trascurabile, le cui masse sono quelle indicate in figura. Determinare la tensione nel filo inferiore e in quello superiore. Se si aggiunge, in figura a destra, un terzo pezzo metallico, sapendo che la tensione nel filo più in alto è di $199\,N$, trovare la tensione nel filo di mezzo e in quello in basso.3



Soluzione:: la figura indica le masse che sono soggette ad una accelerazione di gravità di $9.8\,m/s^2$; il filo agganciato al soffitto, rappresenta il vincolo che impedisce all'oggetto di cadere; il primo tratto di filo sopporta il peso di entrambi i due pezzi, la cui massa complessiva è $m = m_1 + m_2 = 3.5\,kg + 4.5\,kg = 8\,kg$; la tensione sarà quindi

$$T_{sup} = 8\,kg \cdot 9.8\,\frac{m}{s^2} = 78\,N$$

la parte inferiore sostiene solo il secondo pezzo di massa $m_2 = 4.5\,kg$, pertanto

$$T_{inf} = 4.5\,kg \cdot 9.8\,\frac{m}{s^2} = 44\,N$$

Nel secondo caso, con i tre pezzi, è nota la tensione del filo più alto, cioè quello che deve sostenere le tre masse; è quindi possibile ricavare la massa del terzo pezzo; da

$$T_{sup} = (m_1 + m_2 + m_3)\,g = (10.3 + m_2)\,g$$

si ha

$$m_2 = \frac{T_{sup}}{g} - 10.3 = \frac{199\,N}{9.8\,\frac{m}{s^2}} - 10.3\,kg = 10\,kg$$

La tensione del filo centrale, che deve sostenere due pezzi, sarà

$$T_{cent} = (10 + 5.5)\,kg \cdot 9.8\,\frac{m}{s^2} = 152\,N$$

La tensione del filo inferiore, che deve sostenere solo un pezzo, sarà

$$T_{cent} = 5.5\,kg \cdot 9.8\,\frac{m}{s^2} = 54\,N$$

Esercizio 47 (Dinamica del punto materiale)

Se un nucleo cattura un neutrone vagante, deve portarlo ad arrestarsi, entro una distanza non superiore al diametro del nucleo stesso, per effetto della cosiddetta forza forte, che si può considerare nulla all'esterno del nucleo. Supponiamo che un neutrone con velocità iniziale $1.4 \cdot 10^7\, m/s$ sia catturato da un nucleo con diametro $d = 1.0 \cdot 10^{-14}\, m$. Trovare l'intensità della forza, supposta costante, che agisce sul neutrone avente massa $1.67 \cdot 10^{-27}\, kg$.

Soluzione:: Anche qui possiamo utilizzare la seconda legge di Newton, date le condizioni semplificate esposte. Pertanto risulta necessario calcolare l'accelerazione attraverso le leggi della cinematica, note le velocità iniziali e finali e la distanza.

$$v_f^2 = v_i^2 + 2a\triangle s$$

da cui

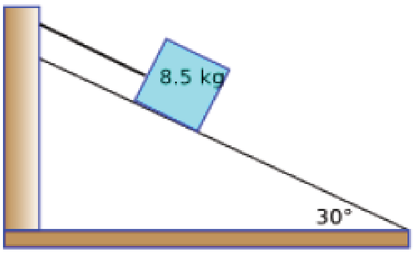
$$a = \frac{v_f^2 - v_i^2}{2\triangle s} = \frac{0 - \left(1.4 \cdot 10^7\right)^2 \frac{m^2}{s^2}}{2 \cdot 1.0 \cdot 10^{-14}\, m} = 9.8 \cdot 10^{27}\, \frac{m}{s^2}$$

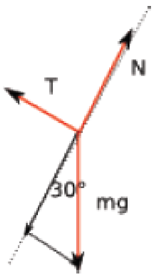
la forza esercitata sarà pertanto

$$F = 1.67 \cdot 10^{-27}\, \frac{m}{s^2} \cdot 9.8 \cdot 10^{27}\, \frac{m}{s^2} = 16.4\, N$$

Esercizio 48 (Dinamica del punto materiale)

Un corpo di massa $8.5\, kg$, può scorrere senza attrito su un piano inclinato di $30°$. É tenuto in equilibrio tramite una fune un cui estremo è fissato ad una parete (si veda la figura). Trovare la tensione, T, della fune e la forza normale, N, che agisce sul blocco. Nel caso che la fune venga tranciata, trovare l'accelerazione del blocco.





Soluzione:: Nel baricentro del blocco agiscono le tre forze indicate in figura; in particolare, mg è il peso del blocco, T è la tensione della fune e N è la reazione vincolare . Se il corpo è inizialmente in equilibrio, la loro somma vettoriale deve essere nulla. Per eseguire questo calcolo, è necessario scomporre la forza peso nelle due componenti, mostrate in figura, dirette lungo il piano inclinato, come T e perpendicolarmente ad esso, come N. Il calcolo può essere fatto utilizzando le funzioni goniometriche, oppure, in questo caso, basta ricordare che un triangolo rettangolo con un angolo di $30°$ è la metà di un triangolo equilatero. Pertanto

$$\begin{aligned} (mg) = P_{parallelo} &= mg \cdot \frac{1}{2} = \frac{8.5\, kg \cdot 9.8\, \frac{m}{s^2}}{2} = 42\, N \\ (mg) = P_{perp} &= mg \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{8.5\, kg \cdot 9.8\, \frac{m}{s^2} \cdot \sqrt{3}}{2} = 72\, N \end{aligned}$$

Nella condizione di equilibrio si ha

$$\begin{aligned} T &= -P_{parallelo} = -42\, N \\ N &= -P_{perp} = -72\, N \end{aligned}$$

Se la fune viene tranciata il corpo scende soggetto alla sola $P_{parallelo}$ e quindi con una accelerazione

$$a = \frac{P_{parallelo}}{m} = \frac{-42}{8.5\, kg} = 4.9\, \frac{m}{s^2}$$

Esercizio 49 (Dinamica del punto materiale)

Una nave spaziale ha una massa di $1.20 \cdot 10^6\,kg$ ed è inizialmente a riposo rispetto al sistema stellare. Trovare l'accelerazione costante necessaria per portare in 3 giorni il veicolo alla velocità di $0.10\,c$ rispetto al sistema stellare, non tenendo conto degli aspetti relativistici; Esprimere l'accelerazione in unità di g e indicare la forza che gli corrisponde. Se i propulsori venissero spenti dopo aver raggiunto la velocità $0.10c$, trovare il tempo impiegato a percorrere 5.0 mesi luce.

Soluzione:: per determinare l'accelerazione costante è necessario conoscere le velocità iniziale e finale e il tempo impiegato (dati tutti assegnati); prima però esprimiamo la velocità nell'unità del SI, sapendo che $c = 3.0 \cdot 10^8\,m/s$ e il tempo in secondi, $3\,giorni = 3 \cdot 24 \cdot 3600 = 259200\,s$

$$a = \frac{v_f - v_i}{\triangle t} = \frac{3.0 \cdot 10^7\,\frac{m}{s}}{259200\,s} = 116\,\frac{m}{s^2}$$

Esprimendola in unità di $g = 9.8\,\frac{m}{s^2}$, si ha

$$a = \frac{116\,\frac{m}{s^2}}{9.8\,\frac{\frac{m}{s^2}}{g}} = 12g$$

La forza costante necessaria può essere ottenuta dalla legge di Newton

$$F = ma = 1.20 \cdot 10^6\,kg \times 116\,\frac{m}{s^2} = 1.4 \cdot 10^8\,N$$

Dopo lo spegnimento dei motori, la nave spaziale si muoverà di moto rettilineo uniforme alla velocità di $0.10c$, cioè il 10% della velocità della luce; la distanza da percorrere è

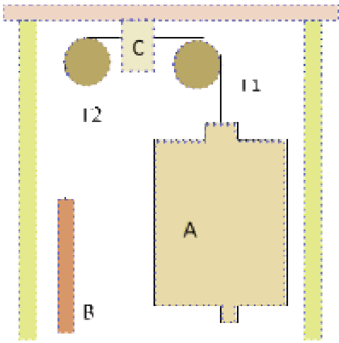
$$5\,mesiluce = 3.0 \cdot 10^8\,\frac{m}{s} \times (5 \times 30 \times 24 \times 3600)\;s = 3.9 \cdot 10^{15}\,m$$

Il tempo necessario sarà

$$t = \frac{s}{v} = \frac{3.9 \cdot 10^{15}\,m}{3.0 \cdot 10^7\,\frac{m}{s}} = 1.3 \cdot 10^8\,s \simeq 4.2\,anni$$

Esercizio 50 (Dinamica del punto materiale)

Il montacarichi in figura è costituito da una gabbia A di $1150\,kg$, un contrappeso B di $1400\,kg$, un meccanismo di azionamento C, un cavo e due pulegge. Durante il funzionamento, il meccanismo C impegna il cavo, obbligandolo a scorrere o frenandone il moto. Ciò fa sì che la tensione T_1 nel cavo su un lato di C differisca dalla tensione T_2 sull'altro lato. Poniamo che l'accelerazione di A verso l'alto e quella verso il basso di B abbiano il valore assoluto $a = 2.0\,m/s^2$. Trascurando le masse e gli attriti di cavo e pulegge, trovare T_1, T_2 e la forza esercitata sul cavo da C.



Soluzione:: Analizziamo le forze che agiscono: sul contrappeso

$$m_B g - T_2 = m_B a$$

da cui

$$T_2 = m_B\,(g-a) = 1400\,kg \cdot (9.8-2.0)\,\frac{m}{s^2} = 10920\,N$$

Sul montacarichi

$$m_A g - T_1 = -m_A a$$

da cui

$$T_1 = m_A\,(g+a) = 1150\,kg \cdot (9.8+2.0)\,\frac{m}{s^2} = 13570\,N$$

La forza esercitata sul cavo dal meccanismo C sarà tale da rendere conto della differenza tra le due tensioni

$$F_C = 13570 - 10920 = 2650\,N$$

Esercizio 51 (Dinamica del punto materiale)

Un razzo di massa $3000\,kg$ è lanciato dal suolo: il propulsore esercita sul razzo una spinta di $6.0 \cdot 10^4\,N$ a un angolo di elevazione costante di $60°$ per $50\,s$, poi si spegne. In prima approssimazione possiamo ignorare la perdita di massa dovuta al consumo di propellente, e trascurare la resistenza dell'aria. Calcolare la quota raggiunta dal razzo all'istante dell'estinzione e la distanza totale orizzontale dal punto di partenza all'impatto col suolo supposto orizzontale (la gittata).

Soluzione:: La forza agisce per $50\,s$ lungo un tratto inclinato di $60°$ rispetto all'orizzonte. Il razzo ha una traiettoria rettilinea sotto la spinta dei motori. Il moto è, quindi, per i primi $50\,s$ soggetto all'accelerazione dei motori e a quella di gravità diretta verso il basso. L'accelerazione dei motori, diretta lungo la direzione della forza, si può scomporre in una componente orizzontale e una verticale; quest'ultima sarà in parte bilanciata dall'accelerazione di gravità, diretta nel verso opposto. Calcoliamo prima l'accelerazione dovuta ai motori

$$a = \frac{F}{m} = \frac{6.0 \cdot 10^4\,N}{3000\,kg} = 20\,\frac{m}{s^2}$$

La componente verticale sarà

$$a_y = 20 \sin 60° = 17.3\,\frac{m}{s^2}$$

A tale componente va sottratta l'accelerazione di gravità diretta nel verso opposto, per cui l'accelerazione verticale totale è

$$a_y^{tot} = (17.3 - 9.8) = 7.5\,\frac{m}{s^2}$$

L'altezza massima raggiunta, prima dello spegnimento dei motori, è

$$h = \frac{1}{2} a_y^{tot} t^2 = \frac{1}{2} \cdot 7.5\,\frac{m}{s^2} \cdot 50^2\,s^2 = 9375\,m$$

Dopo lo spegnimento dei motori, si può supporre che il missile segua le leggi del moto dei proiettili. Salirà quindi ancora per un tratto per inerzia e poi cadrà sotto l'azione del suo peso; contemporaneamente avrà uno spostamento orizzontale a velocità costante. Calcoliamo le velocità raggiunte dal razzo all'atto dello spegnimento dei motori:

$$v_y = a_y^{tot} t = 7.5\,\frac{m}{s^2} \cdot 50\,s = 375\,\frac{m}{s}$$

Per ottenere la componente orizzontale costante della velocità, calcoliamo prima la componente orizzontale dell'accelerazione dovuta ai motori che hanno agito per $50\,s$

$$a_x = 20 \cos 60° = 10\,\frac{m}{s^2}$$

la velocità orizzontale, rimasta costante, sarà

$$v_x = a_x t = 10\,\frac{m}{s^2} \cdot 50\,s = 500\,\frac{m}{s}$$

La velocità del razzo nella direzione del moto sarà

$$v_0 = \sqrt{375^2 + 500^2} = 625\,\frac{m}{s}$$

e l'angolo formato con l'orizzontale è

$$\alpha = \arctan \frac{375}{500} = 37°$$

Il razzo tornerà alla quota di $9375\,m$, dopo aver percorso, usando le relazione del moto dei proiettili

$$R = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g} = \frac{625^2\,\frac{m^2}{s^2} \cdot \sin 74°}{9.8\,\frac{m}{s^2}} = 38316\,m$$

a questa si deve aggiungere la distanza percorsa in orizzontale in fase di salita

$$s_x = \frac{1}{2} \cdot 10\,\frac{m}{s^2} \cdot 50^2\,\frac{m}{s^2} = 12500\,m$$

e quella in fase di ritorno al suolo, sotto l'effetto dell'accelerazione di gravità. Per calcolare tale distanza è necessario conoscere prima il tempo impiegato a percorrere il dislivello di $9375\,m$, che si ricava da $y - y_0 = -v_o t - \frac{1}{2} g t^2$; sostituendo e risolvendo si ha

$$9375 = 375t + 4.9t^2 \qquad t = 19.9\,s$$

In tale tempo, lo spostamento orizzontale con una velocità costante di $500\,m/s$, sarà

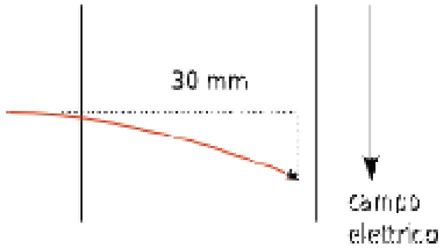
$$s = 500\,\frac{m}{s} \cdot 19.9\,s = 9950\,m$$

La distanza totale percorsa, in direzione orizzontale, sarà

$$d = 38316 + 12500 + 9950 = 60766\,m$$

Esercizio 52 (Dinamica del punto materiale)

Un elettrone viene proiettato orizzontalmente alla velocità di $1.2 \cdot 10^7\, m/s$ in un campo elettrico che esercita su esso una forza verticale costante di $4.5 \cdot 10^{-16}\, N$. La massa dell'elettrone è $9.11 \cdot 10^{-31}\, kg$. Determinare di quale distanza verticale devia l'elettrone durante il tempo in cui percorre $30\, mm$ in orizzontale.



Soluzione:: in figura è mostrata schematicamente la possibile traiettoria dell'elettrone. Lo schema dovrebbe far riconoscere che il moto di tale elettrone può essere descritto dalle leggi del moto parabolico, caratterizzato da una velocità orizzontale costante e da un moto verticale uniformemente accelerato. L'elettrone alla velocità indicata, percorre i $30\, mm$ in

$$t = \frac{0.03\, m}{1.2 \cdot 10^7\, \frac{m}{s}} = 2.5 \cdot 10^{-9}\, s$$

in questo intervallo di tempo l'elettrone «cade» verticalmente di

$$h = \frac{1}{2} a t^2$$

ricaviamo, pertanto, l'accelerazione impressa dal campo elettrico, applicando la legge di Newton

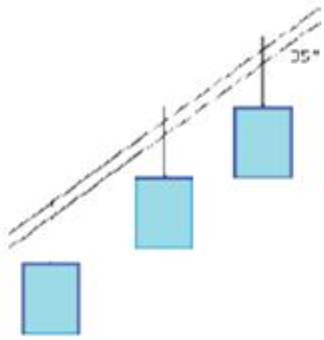
$$a = \frac{F}{m} = \frac{4.5 \cdot 10^{-16}\, N}{9.11 \cdot 10^{-31}\, kg} = 4.9 \cdot 10^{14}\, \frac{m}{s^2}$$

da cui

$$h = \frac{1}{2} a t^2 = \frac{1}{2} \cdot 4.9 \cdot 10^{14}\, \frac{m}{s^2} \cdot \left(2.5 \cdot 10^{-9}\, s\right)^2 = 1.5 \cdot 10^{-3}\, m$$

Esercizio 53 (Dinamica del punto materiale)

La figura rappresenta un tratto di funivia. La massa totale di ogni cabina, compresi i passeggeri, non deve superare i $2800\,kg$. Le cabine, che scorrono su una fune portante, sono trascinate da una seconda fune traente fissata a ciascun sostegno, rigido e non inclinabile. Trovare la differenza di tensione fra sezioni adiacenti della fune traente se le cabine, a pieno carico, sono accelerate di $0.81\,m/s^2$ su una direzione inclinata di $35°$ rispetto al piano orizzontale.



Soluzione:: Si può supporre che le forze agenti siano la componente parallela della forza peso e la tensione, dirette in versi opposti. La differenza tra le tensioni è dovuta solo alla variazione del numero di cabine trainate e quindi dalla loro massa, che raddoppia, triplica, ecc. Pertanto, scrivendo la relazione sulle forze, si ha

$$P_{par} - T = -ma$$

se ho due cabine

$$2P_{par} - T = -2ma$$

da cui si ha

$$\Delta T = P_{par} + ma = 2800\,kg \cdot 9.8\,\frac{m}{s^2} \cdot \cos 35° + 2800\,kg \cdot 0.81\,\frac{m}{s^2} = 1800\,N$$

Exercise 3.35. Una nave spaziale ha una massa di $1.20 \cdot 10^6\,kg$ ed è inizialmente a riposo rispetto al sistema stellare. Trovare l'accelerazione costante necessaria per portare in 3 giorni il veicolo alla velocità di $0.10\,c$ rispetto al sistema stellare, non tenendo conto degli aspetti relativistici; Esprimere l'accelerazione in unità di g e indicare la forza che gli corrisponde. Se i propulsori venissero spenti dopo aver raggiunto la velocità $0.10c$, trovare il tempo impiegato a percorrere 5.0 mesi luce.

Soluzione:: per determinare l'accelerazione costante è necessario conoscere le velocità iniziale e finale e il tempo impiegato (dati tutti assegnati); prima però esprimiamo la velocità nell'unità del SI, sapendo che $c = 3.0 \cdot 10^8\,m/s$ e il tempo in secondi, $3\,giorni = 3 \cdot 24 \cdot 3600 = 259200\,s$

$$a = \frac{v_f - v_i}{\Delta t} = \frac{3.0 \cdot 10^7\,\frac{m}{s}}{259200\,s} = 116\,\frac{m}{s^2}$$

Esprimendola in unità di $g = 9.8\,\frac{m}{s^2}$, si ha

$$a = \frac{116\,\frac{m}{s^2}}{9.8\,\frac{\frac{m}{s^2}}{g}} = 12g$$

La forza costante necessaria può essere ottenuta dalla legge di Newton

$$F = ma = 1.20 \cdot 10^6\,kg \times 116\,\frac{m}{s^2} = 1.4 \cdot 10^8\,N$$

Dopo lo spegnimento dei motori, la nave spaziale si muoverà di moto rettilineo uniforme alla velocità di $0.10c$, cioè il 10% della velocità della luce; la distanza da percorrere è

$$5\,mesiluce = 3.0 \cdot 10^8\,\frac{m}{s} \times (5 \times 30 \times 24 \times 3600)\,s = 3.9 \cdot 10^{15}\,m$$

Il tempo necessario sarà

$$t = \frac{s}{v} = \frac{3.9 \cdot 10^{15}\,m}{3.0 \cdot 10^7\,\frac{m}{s}} = 1.3 \cdot 10^8\,s \simeq 4.2\,anni$$

Esercizio 54 (Dinamica del punto materiale)

Una particella di massa $m = 1\,kg$ ha energia potenziale espressa dalla relazione

$$U = A(1 - \cos kx)$$

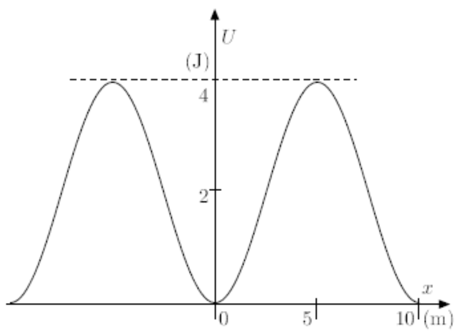
in cui $A = 2\,J$, $k = \pi/5\,rad/m$, e può muoversi, ovviamente, lungo l'asse x.

Inizialmente la particella si trova nella posizione $x_0 = 1\,m$. Determinare la massima distanza x_m che essa raggiunge se le velocità iniziali sono rispettivamente $v_0 = 2\,m/s$ e $v_0 = 4\,m/s$.

L'andamento dell'energia potenziale è periodico, come in figura, con massimi $U_{max} = 2A = 4\,J$, in corrispondenza a

$$kx = (2n+1)\pi, \qquad x = \frac{(2n+1)\pi}{k}.$$

La particella si trova nella buca di potenziale il cui valore massimo, $n = 0$, corrisponde a $x = 5\,m$ e pertanto nel primo caso, avendo energia cinetica $T = 2\,J$, non potrà oltrepassare tale massimo.



La particella è legata, dunque raggiunge la distanza massima con energia cinetica nulla; pertanto:

$$T_0 + U_0 = U;$$

da cui:

$$U = \frac{1}{2}mv_0^2 + A(1 - \cos kx_0) = 2,38\,J.$$

Quindi, alla distanza massima si ha

$$A(1 - \cos kx_m) = 2,38\,J.$$

Si ottiene:

$$x_m = \frac{1}{k}\cos^{-1}\left(1 - \frac{2,38}{A}\right) = 2,8\,m.$$

Nel caso in cui la velocità iniziale sia $v_0 = 4\,m/s$, l'energia totale della particella risulta

$$E = \frac{1}{2}mv_0^2 + U_0 = 16,38\,J,$$

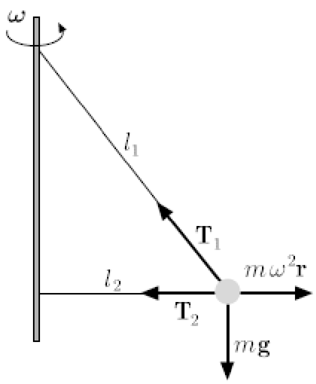
maggiore dell'energia potenziale massima, pertanto la particella si allontana indefinitamente lungo l'asse x.

Esercizio 55 (Dinamica del punto materiale)

Un corpo puntiforme di massa $m = 1\,kg$ è collegato mediante due fili ideali, di lunghezza rispettivamente $l_1 = 1\,m$ e $l_2 = 0,5\,m$ ad un'asta rigida verticale che ruota con velocità angolare ω. I fili sono fissati all'asta in modo che, nella rotazione, il filo più corto risulti ortogonale ad essa. Assegnata la tensione massima che possono sopportare i fili, $T_{max} = 60\,N$, determinare il valore massimo di ω.

Nel riferimento ruotante si ha equilibrio delle forze reali e della forza di trascinamento (centrifuga):

$$\mathbf{T}_1 + \mathbf{T}_2 + m\mathbf{g} + m\omega^2\mathbf{r} = 0.$$



Proiettando sugli assi orizzontale e verticale, si ha:

$$-T_1\cos 60^\circ - T_2 + m\omega^2 l_2 = 0, \qquad T_1\sin 60^\circ - mg = 0.$$

Dalla prima,

$$\frac{1}{2}T_1 + T_2 = m\omega^2 l_2.$$

Dalla seconda,

$$T_1\frac{\sqrt{3}}{2} = mg, \quad \Rightarrow \quad T_1 = \frac{2}{\sqrt{3}}mg = 11,33\,N,$$

indipendente dalla velocità angolare.

Ricavando ω dalla (1) e sostituendo a T_2 il valore della tensione massima assegnato, si ha:

$$\omega_{max} = \sqrt{\frac{T_1}{2ml_2} + \frac{T_{max}}{ml_2}} = 11,46\,rad/s\,.$$

Esercizio 56 (Dinamica del punto materiale)

In un riferimento inerziale, un punto materiale di massa m si muove su una traiettoria circolare di raggio r. L'area spazzata dal vettore posizione, con origine nel centro della circonferenza, segue la legge

$$S = \frac{1}{2} c\, t^2,$$

dove c è una costante. Determinare il modulo della forza agente sul punto materiale.

Nel problema viene assegnata la legge con cui viene spazzata l'area dal vettore posizione. Ciò indica che la derivata di S rispetto al tempo fornisce il modulo della velocità areolare:

$$\frac{dS}{dt} = c\, t. \tag{1}$$

Ricordando che la velocità areolare è definita dalla relazione

$$\frac{d\vec{S}}{dt} = \frac{1}{2}(\mathbf{r} \times \mathbf{v}),$$

nel caso di traiettoria circolare, si ha

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2} r v = \frac{1}{2} \omega r^2. \tag{2}$$

Uguagliando le (1) e (2):

$$c\, t = \frac{1}{2} \omega r^2, \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{2c}{r^2}\, t. \tag{3}$$

La velocità angolare cresce linearmente col tempo.

D'altra parte, per determinare il modulo della forza agente sul punto materiale occorre conoscere il modulo dell'accelerazione, dato da:

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}, \tag{4}$$

con

$$a_t = \dot{\omega} r, \qquad a_n = \omega^2 r.$$

Sostituendo nella (4),

$$a = r\sqrt{\dot{\omega}^2 + \omega^4},$$

e, tenuto conto della (3),

$$a = \frac{2c}{r}\sqrt{1 + \frac{4c^2}{r^4} t^4}.$$

Pertanto:

$$F = ma = \frac{2mc}{r}\sqrt{1 + \frac{4c^2}{r^4} t^4}.$$

Esercizio 57 (Dinamica del punto materiale)

Un punto materiale di massa $m = 10\,gm$ si muove su una traiettoria circolare di raggio $R = 20\,cm$ con moto uniformemente ritardato. Sapendo che all'istante $t_0 = 0$ la sua velocità ha modulo $v_0 = 15\,m/s$ e che all'istante $t_1 = 5\,s$ è nulla, determinare le leggi orarie della velocità, del moto e dell'accelerazione. Calcolare inoltre il lavoro compiuto dalle forze agenti nell'intervallo di tempo considerato.

Il modulo dell'accelerazione tangenziale è costante,

$$a_t = \frac{0 - v_0}{t_1 - t_0} = -3\,m/s^2.$$

Si deduce:

$$v = v_0 + a_t\,t = 15 - 3\,t, \qquad s = v_0 t + \frac{1}{2} a_t\,t^2 = 15\,t - \frac{3}{2} t^2. \tag{1}$$

Ricordando che il modulo dell'accelerazione è

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2},$$

con

$$a_n = \frac{v^2}{R},$$

tenuto conto della prima delle (1), si trova:

$$a = \sqrt{9 + \left[\frac{(15 - 3t)^2}{0,2}\right]^2}. \tag{2}$$

Si noti che all'istante t_1, essendo $v = 0$, si annulla soltanto l'accelerazione normale. Infatti in tale istante il punto materiale, animato di velocità iniziale v_0 positiva, per esempio diretta nel verso antiorario, ma soggetto all'accelerazione tangenziale negativa di modulo costante, inverte il suo moto e procede con accelerazione il cui modulo è dato dalla (2). D'altra parte il grafico della seconda delle (1), che esprime la legge oraria con cui è percorsa la traiettoria, è una parabola ad asse verticale e concavità volta in basso. L'ascissa t_1 corrisponde proprio al suo vertice, punto di inversione del moto.

Il lavoro delle forze è uguale alla variazione di energia cinetica del punto:

$$\mathcal{L} = \Delta T = -\frac{1}{2} m v_0^2 = -1,12\,J.$$

Esercizio 58 (Dinamica del punto materiale)

Un pendolo semplice di massa $m = 1\,kg$ e lunghezza l, inizialmente in quiete, è fissato al soffitto di un vagone che parte con accelerazione costante di modulo $a_t = 4,9\,m/s^2$. Calcolare la massima tensione del filo durante il moto del vagone.

Il pendolo, disposto inizialmente lungo la verticale, appena il vagone accelera comincia ad oscillare a causa della forza di trascinamento $\mathbf{F}_t = -m\mathbf{a}_t$. La posizione attorno alla quale avvengono le oscillazioni, nel riferimento del vagone (accelerato), è determinata dalla relazione

$$\mathbf{F} + \mathbf{F}_t = 0,$$

dove $\mathbf{F}$ è la somma delle forze reali: forza peso e tensione del filo. Detta $\mathbf{T}$ la tensione del filo, la precedente si scrive:

$$m\mathbf{g} + \mathbf{T} + m\mathbf{a}_t = 0. \qquad (1)$$

Assunto positivo il verso degli archi crescenti e proiettando sulla tangente alla traiettoria si ottiene la relazione:

$$ma_t \cos\theta_0 - mg\sin\theta_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad a_t = g\frac{\sin\theta_0}{\cos\theta_0} = g\tan\theta_0, \qquad (2)$$

che determina l'angolo θ_0 attorno al quale avvengono le oscillazioni oppure, noto quest' ultimo, l'accelerazione di trascinamento.

Si intuisce subito, come avviene per un pendolo che oscilla in un riferimento inerziale, che in tale posizione la tensione del filo è massima. Infatti l'equazione della dinamica nel riferimento accelerato si scrive:

$$m\mathbf{g} + \mathbf{T} + m\mathbf{a}_t = m\mathbf{a}_r.$$

Assunto come positivo il verso centripeto e proiettando sulla normale, si ha:

$$T - mg\cos\theta - ma_t\sin\theta = m\frac{v^2}{l}. \qquad (3)$$

Detto φ l'angolo di oscillazione rispetto a θ_0, la (3) diventa

$$T - mg\cos(\theta_0 + \varphi) - ma_t\sin(\theta_0 + \varphi) = m\frac{v^2}{l},$$

ossia:

$$T - (mg\cos\theta_0 + ma_t\sin\theta_0)\cos\varphi + (ma_t\cos\theta_0 - mg\sin\theta_0)\sin\varphi = m\frac{v^2}{l},$$

e ricordando la prima delle (2),

$$T - (mg\cos\theta_0 + ma_t\sin\theta_0)\cos\varphi = m\frac{v^2}{l}.$$

Si trae,

$$T = (mg\cos\theta_0 + ma_t\sin\theta_0)\cos\varphi + m\frac{v^2}{l}.$$

La tensione massima si ha per $\varphi = 0$, cioè

$$T_{max} = (mg\cos\theta_0 + ma_t\sin\theta_0) + m\frac{v_0^2}{l},$$

dove v_0 è la velocità (massima) con cui transita il pendolo in corrispondenza a θ_0.

Essendo

$$mg\cos\theta_0 + ma_t\sin\theta_0 = m\sqrt{g^2 + a_t^2},$$

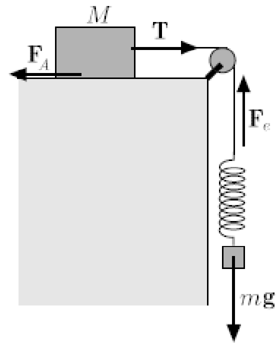
si può anche scrivere:

$$T_{max} = m\sqrt{g^2 + a_t^2} + \frac{mv_0^2}{l}. \qquad (4)$$

Esercizio 59 (Dinamica del punto materiale)

Un blocco di massa $M = 4\,kg$, appoggiato su un piano orizzontale è collegato, mediante un filo inestendibile e di massa trascurabile, ad una molla ideale di costante elastica $k = 100\,N/m$, disposta verticalmente, al cui estremo inferiore viene agganciata una massa m, in modo tale da non imprimere oscillazioni al sistema; vedi figura. Sapendo che i coefficienti di attrito statico e dinamico tra blocco e piano sono rispettivamente $\mu_s = 0,5$, $\mu_d = 0,2$, determinare per quale valore di m il sistema si pone in moto e il corrispondente allungamento della molla.

Le forze che agiscono su M sono la reazione vincolare $\mathbf{R} = \mathbf{R}_n + \mathbf{R}_t$, la tensione del filo $\mathbf{T}$ ed il peso $M\mathbf{g}$. La reazione vincolare normale $\mathbf{R}_n$ è ininfluente ai fini del moto in quanto opposta al peso, mentre la reazione tangenziale $\mathbf{R}_t$ è la forza di attrito $\mathbf{F}_A$. Le forze che agiscono su m sono il peso $m\mathbf{g}$ e la forza elastica.



Proiettando le forze su un asse orizzontale e su un asse verticale e tenuto conto che l'accelerazione di ogni parte del sistema è la stessa, le equazioni di Newton per le due masse sono:

$$T - F_A = Ma, \qquad F_e + mg = ma.$$

Poiché $F_e = -k\Delta x$ ed il filo ideale trasmette inalterato il modulo della forza elastica, risulta $T = k\Delta x$. Quindi le precedenti si scrivono:

$$k\Delta x - F_A = Ma, \qquad -k\Delta x + mg = ma. \tag{1}$$

Nelle condizioni di moto incipiente ($a = 0$) si ha equilibrio dinamico delle forze; pertanto, indicando con Δx_1 l'allungamento della molla in queste condizioni, dalle (1) si ha

$$k\Delta x_1 = F_A = \mu_s Mg, \qquad \Delta x_1 = \frac{mg}{k}. \tag{2}$$

Dalla prima si ricava il valore minimo di m che pone in moto il sistema:

$$m = \mu_s M = 2\,kg$$

Quando il sistema è in moto, dalla prima delle (1) si ricava

$$a = \frac{k\Delta x - F_A}{M}.$$

Sostituendo nella seconda, tenuto conto della (2) e ricordando che $F_A = \mu_d Mg$, si ottiene

$$\Delta x = \frac{mg}{k}\frac{M(1+\mu_d)}{m+M} = \Delta x_1 \frac{M(1+\mu_d)}{m+M} = 0,8\Delta x_1 = 0,16\,m$$

Esercizio 60 (Dinamica del punto materiale)

Una slitta di massa $m = 100\,kg$, trainata da una forza costante di modulo $F = 400\,N$ che forma un angolo θ rispetto all'orizzontale, deve percorrere un tratto $l = 50\,m$ su un piano. Sapendo che il coefficiente d'attrito dinamico tra slitta e piano è $\mu_d = 0,3$, determinare l'angolo θ affinché il tempo di percorrenza sia minimo, supponendo che la velocità iniziale sia nulla.

Il problema va risolto applicando l'equazione di Newton,

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F},$$

dove $\mathbf{F}$ è la somma delle forze agenti: forza esterna, peso, reazione vincolare normale $\mathbf{R}_n$ e reazione tangente $\mathbf{R}_t$, pari alla forza d'attrito. Proiettando sugli assi x-y, orizzontale e verticale e tenuto conto che il moto avviene solo secondo x, si ha

$$m\ddot{x} = F\cos\theta - R_t = F\cos\theta - \mu_d(mg - F\sin\theta)$$
$$m\ddot{y} = F\sin\theta - mg + R_n = 0.$$

Dalla prima si ottiene:

$$\ddot{x} = \frac{F(\cos\theta + \mu_d\sin\theta) - \mu_d mg}{m}.$$

Affinché il tempo di percorrenza sia minimo, l'accelerazione impressa alla slitta dev'essere massima. Pertanto, annullando la derivata prima dell'accelerazione rispetto a θ, si ha:

$$-F\sin\theta + F\mu_d\cos\theta = 0, \qquad F\sin\theta = F\mu_d\cos\theta.$$

Si trae,

$$\tan\theta = \mu_d = 0,3, \quad \Rightarrow \quad \theta = \theta^* = 16,7°.$$

Il tempo di percorrenza minimo è dato da:

$$t = \sqrt{\frac{2l}{a_{max}}} = \sqrt{\frac{2ml}{F(\cos\theta^* + \mu_d\sin\theta^*) - \mu_d\sin\theta^*}} = 4,9\,s$$

Esercizio 61 (Dinamica del punto materiale)

Una guida verticale scabra ha la forma di un quarto di circonferenza di raggio $r = 10\,m$. Un blocchetto di massa $m = 5\,kg$ viene spinto dalla base della guida fino alla sommità, da una forza **F** tangente alla guida, di modulo tale da mantenere costante il modulo della velocità del blocchetto lungo tutta la traiettoria, uguale a $v_0 = 5\,m/s$. Sapendo che il coefficiente d'attrito dinamico tra blocchetto e guida è $\mu_d = 0,3$, determinare il lavoro della forza.

Indicando con $\mathcal{L}$, $\mathcal{L}_A$ e $\mathcal{L}_g$ rispettivamente i lavori della forza applicata, della forza d'attrito e della forza peso, per il teorema dell'energia cinetica, la somma di tali lavori è pari alla variazione di energia cinetica, nel caso del problema, nulla:

$$\mathcal{L} + \mathcal{L}_A + \mathcal{L}_g = 0, \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L} + \mathcal{L}_A = -\mathcal{L}_g = mgr, \tag{1}$$

pari alla variazione di energia potenziale del blocchetto. La somma dei lavori al primo membro è dovuta a forze non conservative; infatti la forza applicata è una sorta di forza "intelligente"che mantiene costante la velocità, per esempio una forza muscolare; la forza d'attrito è notoriamente non conservativa. Quindi, essendo il lavoro delle forze non conservative pari alla variazione di energia totale,

$$\mathcal{L}^{nc} = (T_B + U_B) - (T_A + U_A),$$

nel caso del problema ($T_B = T_A$) si ha:

$$\mathcal{L}^{nc} = U_B - U_A = mgr.$$

Per calcolare esplicitamente il lavoro della forza d'attrito si osservi che sul blocchetto agiscono le forze: F, la forza d'attrito $F_A = \mu_d R_n$, la reazione vincolare normale $\mathbf{R}_n$ ed il peso. Si ha:

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F} + \mathbf{F}_A + \mathbf{R}_n + m\mathbf{g}.$$

Proiettando lungo la tangente e lungo la normale alla guida, assunti positivi i versi centripeto e degli archi crescenti e tenuto conto che l'accelerazione tangenziale è nulla (velocità v_0 costante), si ha

$$\begin{aligned} F - F_A - mg\sin\theta &= 0 \\ m\frac{v_0^2}{r} &= R_n - mg\cos\theta, \end{aligned} \tag{2}$$

dove θ è l'angolo che forma la verticale col raggio. Dalla seconda delle (2) si ricava

$$R_n = mg\cos\theta + m\frac{v_0^2}{r}.$$

Pertanto, tenuto conto che l'elemento d'arco $ds = rd\theta$, il lavoro elementare della forza d'attrito $F_A = \mu_d R_n$ è dato da:

$$d\mathcal{L}_A = -\mu_d(mgr\cos\theta d\theta + mv_0^2 d\theta).$$

Integrando:

$$\mathcal{L}_A = -\mu_d\left(mgr\int_0^{\pi/2}\cos\theta d\theta + mv_0^2\int_0^{\pi/2}d\theta\right) = -\mu_d\left(mgr + mv_0^2\frac{\pi}{2}\right).$$

Sostituendo nella (1),

$$\mathcal{L} = -\mathcal{L}_A - \mathcal{L}_g = \mu_d\left(mgr + mv_0^2\frac{\pi}{2}\right) + mgr = 696\,J$$

Va osservato che tale lavoro può essere ricavato dalla prima delle (2). Più sopra si è detto che la forza applicata al blocchetto dev'essere una forza "intelligente"in quanto va mantenuta costante la velocità. Se, per esempio, agisse una forza di modulo costante, tangente alla traiettoria, la reazione normale dipenderebbe oltre che dall'angolo θ, dalla velocità. In tal caso il calcolo del lavoro diverrebbe piuttosto complesso.

Limitandosi al caso di un corpo puntiforme vincolato ad una guida circolare scabra orizzontale, sul quale agisce una forza F di modulo costante tangente alla guida, l' equazione di Newton è

$$ma = F + F_A + R_n.$$

Come prima, proiettando sulla tangente e sulla normale, si ha

$$ma_t = F - F_A = F - \mu_d R_n, \qquad R_n = m\frac{v^2}{r}.$$

Pertanto:

$$m\frac{d^2s}{dt^2} = F - \mu_d m\frac{v^2}{r}, \tag{3}$$

dove s è l'arco di traiettoria. Si osserva anzitutto che, ponendo $a_t = d^2s/dt^2 = 0$, la velocità del corpo tende al valore limite

$$v_L = \sqrt{\frac{Fr}{\mu_d m}}.$$

Dunque il lavoro delle forze è pari alla variazione di energia cinetica:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}mv_L^2 - \frac{1}{2}mv_0^2,$$

dove v_0 è la velocità iniziale che, in particolare, può essere nulla.

Esercizio 62 (Dinamica del punto materiale)

Un corpo puntiforme è appoggiato sulla falda interna di un cono circolare che ruota attorno al suo asse, disposto verticalmente, con velocità angolare ω costante. Detta r la distanza del corpo dall'asse e θ la semiapertura del cono, si determini il valore del coefficiente di attrito statico necessario perché il corpo sia in equilibrio.

Nel riferimento ruotante si ha equilibrio relativo delle forze reali e di trascinamento:

$$\mathbf{F} + \mathbf{F}_t = 0. \tag{1}$$

Le forze reali comprendono la forza peso, la reazione normale $\mathbf{R}_n$, ortogonale alla falda del cono, e la forza d'attrito $\mathbf{F}_A$. Pertanto la (1) si scrive,

$$m\mathbf{g} + \mathbf{R}_n + \mathbf{F}_A + m\omega^2\mathbf{r} = 0. \tag{2}$$

Proiettando la (2) su una generatrice del cono, assumendo positivo il verso ascendente, e sulla normale, assumendo positivo il verso di $\mathbf{R}_n$, si ha

$$\begin{aligned} -mg\cos\theta + F_A + m\omega^2 r\sin\theta = 0 \\ -mg\sin\theta + R_n - m\omega^2 r\cos\theta = 0. \end{aligned}$$

Si ricava:

$$\begin{aligned} F_A &= mg\cos\theta - m\omega^2 r\sin\theta \\ R_n &= mg\sin\theta + m\omega^2 r\cos\theta. \end{aligned} \tag{2}$$

Poiché per l'equilibrio,

$$F_A \le \mu_s R_n, \quad \Rightarrow \quad \mu_s \ge \frac{F_A}{R_n},$$

per le (2) si ottiene:

$$\mu_s \ge \frac{g\cos\theta - \omega^2 r\sin\theta}{g\sin\theta + \omega^2 r\cos\theta}. \tag{3}$$

Naturalmente questa relazione pone restrizioni sulla velocità angolare e sull'angolo di semiapertura del cono, in quanto il numeratore dev'essere positivo:

$$g\cos\theta - \omega^2 r\sin\theta > 0.$$

Se fosse $\mu_s = 0$,

$$g\cos\theta = \omega^2 r\sin\theta, \quad \Rightarrow \quad \omega^2 = \frac{g}{r\tan\theta}.$$

Per l'equilibrio, assegnato l'angolo θ, si avrebbe un preciso valore di ω.

Lo stesso risultato si ottiene nel riferimento fisso. In tal caso si ha

$$m\mathbf{a} = m\mathbf{g} + \mathbf{R}_n + \mathbf{F}_A,$$

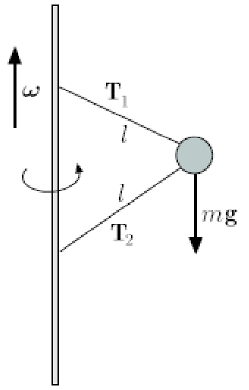
dove $\mathbf{a}$ è l'accelerazione centripeta. Proiettando secondo una generatrice del cono e la sua normale, con la stessa convenzione per i segni, si ha

$$\begin{aligned} -m\omega^2 r\sin\theta &= F_A - mg\cos\theta \\ m\omega^2 r\cos\theta &= -mg\sin\theta + R_n. \end{aligned}$$

Procedendo come prima, si ottiene la (3).

Esercizio 63 (Dinamica del punto materiale)

Una sfera di massa $m = 1\,kg$ è collegata ad un'asta rigida verticale mediante due fili ideali, aventi la stessa lunghezza $l = 2\,m$. I fili sono fissati all'asta in due punti distanti l, in modo da formare un triangolo equilatero, vedi figura. Posta in rotazione l'asta con velocità angolare costante, determinare il minimo valore di ω per cui entrambi il fili risultano tesi e il valore delle tensioni che si sono destate.



Nel riferimento ruotante, si ha equilibrio delle forze reali e dalla forza di trascinamento,

$$\mathbf{F} + \mathbf{F}_t = 0.$$

La somma delle forze reali $\mathbf{F}$ comprende: le tensioni dei fili e la forza peso; $\mathbf{F}_t$ è la forza centrifuga, pertanto:

$$\mathbf{T}_1 + \mathbf{T}_2 + m\mathbf{g} + m\omega^2\mathbf{r} = 0. \qquad (1)$$

Giacché i fili formano col segmento d'asta un triangolo equilatero, proiettando la (1) sugli assi x, orizzontale ed y verticale, si ha

$$-T_1 \cos 30° - T_2 \cos 30° + m\omega^2 r = 0$$
$$T_1 \cos 60° - T_2 \cos 60° - mg = 0.$$

Essendo:

$$r = l \cos 30° = l\frac{\sqrt{3}}{2},$$

dalla prima si trae,

$$m\omega^2 l = T_1 + T_2. \qquad (2)$$

Dalla seconda:

$$T_1 - T_2 = 2mg. \qquad (3)$$

Tenuto conto della (3), dalla (2) si deduce:

$$\omega^2 = \frac{2mg + 2T_2}{ml}.$$

Ma $T_2 \geq 0$, quindi il minimo valore di ω si ha per $T_2 = 0$;

$$\omega^2 = \frac{2g}{l}, \quad \Rightarrow \quad \omega = 3,1\,rad/s.$$

In tali condizioni la tensione T_1 risulta:

$$T_1 = 2mg = 19,6\,N.$$

Esercizio 64 (Dinamica del punto materiale)

Un corpo puntiforme di massa m è saldato ad una estremità di un'asta rigida di massa trascurabile, che ruota in un piano verticale attorno all'altro estremo con velocità angolare costante. Nel punto più basso della traiettoria l'asta esercita sul corpo una reazione $R_B = 12\,N$ mentre, se la velocità angolare raddoppia, la reazione diventa $R'_B = 21\,N$. Determinare le reazioni R_A ed R'_A nel punto più alto della traiettoria.

L'equazione della dinamica si scrive,

$$m\mathbf{a} = \mathbf{R} + m\mathbf{g}.$$

Assumendo positivo il verso centripeto e detto r il raggio della traiettoria, nel punto più basso si ha:

$$\begin{aligned} m\omega^2 r &= R_B - mg \\ 4m\omega^2 r &= R'_B - mg \end{aligned} \tag{1}$$

Alla sommità,

$$\begin{aligned} m\omega^2 r &= R_A + mg \\ 4m\omega^2 r &= R'_A + mg. \end{aligned} \tag{2}$$

Dalle (1) si ricavano le espressioni di mg e di $m\omega^2 r$; si ha:

$$mg = \frac{4R_B - R'_B}{3}, \qquad m\omega^2 r = \frac{R'_B - R_B}{3}.$$

Sostituendo nelle (2) si ottiene:

$$R_A = \frac{2R'_B - 5R_B}{3} = -6\,N, \qquad R'_A = \frac{5R'_B - 8R_B}{3} = 3\,N.$$

Esercizio 65 (Dinamica del punto materiale)

Un punto materiale di massa m, in moto con velocità $\mathbf{v}_0$, a partire dall'istante $t = 0$ viene sottoposto a una forza variabile nel tempo secondo la legge $\mathbf{F} = \mathbf{F}_0 \cos \omega t$, con $\mathbf{F}_0$ vettore costante inclinato rispetto a $\mathbf{v}_0$ di un angolo α. Il moto si svolge nel piano xy individuato dai vettori $\mathbf{v}_0$ e $\mathbf{F}_0$; si determinino le equazioni parametriche del moto e il lavoro $\mathscr{L}$ compiuto dalla forza F nell'intervallo di tempo $(t = 0, t = \pi/2\omega)$.

Si consideri un sistema di coordinate cartesiane x, y, con l'asse x diretto come $\mathbf{v}_0$ e l'origine nel punto occupato dal punto materiale all'istante $t = 0$. Rispetto a questo sistema di riferimento le equazioni del moto del corpo sono

$$m \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = F_0 \cos\alpha \, \cos\omega t \,, \tag{1}$$

$$m \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} = F_0 \operatorname{sen}\alpha \, \cos\omega t \,. \tag{2}$$

La soluzione della prima equazione differenziale si ottiene aggiungendo all'integrale generale $x_o(t)$ dell'equazione omogenea associata un suo integrale particolare $x_p(t)$. L'equazione omogenea associata è

$$m \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = 0 \,,$$

e la corrispondente soluzione generale è

$$x_o(t) = At + B \,,$$

con A e B costanti arbitrarie. Dato che la derivata seconda rispetto al tempo di $\cos\omega t$ è $-\omega^2 \cos\omega t$, un integrale particolare della (1) è del tipo

$$x_p(t) = P \cos\omega t \,,$$

con P costante da determinare in modo che $x_p(t)$ soddisfi l'equazione (1). Sostituendo tale espressione di $x_p(t)$ nella (1), si ottiene

$$-m\omega^2 P \cos \omega t = F_0 \cos \alpha \, \cos \omega t \, ,$$

e quindi

$$P = -\frac{F_0 \cos \alpha}{m\omega^2} \, .$$

In conclusione, la soluzione generale della (1) è:

$$x(t) = x_o(t) + x_p(t) = At + B - \frac{F_0 \cos \alpha}{m\omega^2} \cos \omega t \, . \tag{3}$$

Con procedimento del tutto analogo, si ottiene come soluzione dell'equazione (2) un'espressione del tipo

$$y(t) = Ct + D - \frac{F_0 \operatorname{sen} \alpha}{m\omega^2} \cos \omega t \, , \tag{4}$$

con C e D costanti.

Le quattro costanti A, B, C e D restano determinate se si impone che all'istante $t = 0$ le soluzioni (3) e (4) soddisfino alle condizioni $x(0) = 0$, $y(0) = 0$, $\dot{x}(0) = v_0$ e $\dot{y}(0) = 0$. Si ottiene:

$$A = v_0 \, , \quad B = \frac{F_0 \cos \alpha}{m\omega^2} \, , \quad C = 0 \, , \quad D = \frac{F_0 \operatorname{sen} \alpha}{m\omega^2} \, .$$

Le equazioni parametriche del moto del corpo sono quindi

$$x(t) = v_0 t + \frac{F_0 \cos \alpha}{m\omega^2}(1 - \cos \omega t) \, , \tag{5}$$

$$y(t) = \frac{F_0 \operatorname{sen} \alpha}{m\omega^2}(1 - \cos \omega t) \, . \tag{6}$$

Il lavoro $\mathscr{L}$ compiuto dalla forza nell'intervallo di tempo $(0, \pi/2\omega)$ può calcolarsi partendo dalla definizione di lavoro

$$\mathscr{L} = \int (F_x \, \mathrm{d}x + F_y \, \mathrm{d}y) = \int_0^{\pi/2\omega} F_x \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \, \mathrm{d}t + \int_0^{\pi/2\omega} F_y \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \, \mathrm{d}t \, ,$$

utilizzando l'espressione di $\mathbf{F}$ e le relazioni (5) e (6), oppure attraverso il teorema delle forze vive, dopo avere ricavato la velocità del corpo derivando rispetto al tempo le equazioni (5) e (6). In tutti e due i casi, si ha il risultato:

$$\mathscr{L} = \frac{F_0 v_0 \cos \alpha}{\omega} + \frac{F_0^2}{2m\omega^2} \, .$$

Esercizio 66 (Dinamica del punto materiale)

Un punto materiale di massa m si muove sotto l'azione di una forza dipendente dalla sua velocità $\mathbf{v}$ secondo la legge $\mathbf{F} = \mathbf{c} \times \mathbf{v}$, $\mathbf{c}$ indicando un vettore costante. Si determinino le possibili traiettorie del punto.

Si consideri una terna cartesiana di riferimento con l'asse z orientato nella direzione di $\mathbf{c}$ e gli assi x e y scelti arbitrariamente in un piano ortogonale a $\mathbf{c}$. Lungo queste tre direzioni le componenti della forza agente sul punto sono $F_x = -c\dot{y}$, $F_y = c\dot{x}$, $F_z = 0$ e le equazioni di moto del punto materiale risultano pertanto

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -c\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}, \tag{1}$$

$$m\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} = c\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, \tag{2}$$

$$m\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2} = 0. \tag{3}$$

La soluzione dell'equazione (3) è

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = K, \quad \Rightarrow \quad z(t) = Kt + k,$$

con K e k costanti arbitrarie, determinabili in base alle condizioni iniziali. Per risolvere le equazioni (1) e (2) si può procedere nel modo seguente(*): si derivino rispetto al tempo i due membri della (1) e, facendo sistema tra la nuova equazione così ottenuta e la (2), si ricava

$$\frac{\mathrm{d}^3x}{\mathrm{d}t^3} = -\frac{c^2}{m^2}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}.$$

La soluzione di questa equazione differenziale è del tipo

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = A\,\mathrm{sen}(\omega t + \alpha), \tag{4}$$

(*) Alternativamente, si sommino ai due membri della (1) i corrispondenti membri della (2) moltiplicati per $\mathrm{i} = \sqrt{-1}$: ponendo $w = x + \mathrm{i}y$, si ricava

$$m\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}t^2} = \mathrm{i}c\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t},$$

cosicché

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} - \mathrm{i}\frac{c}{m}w\right) = 0.$$

La soluzione generale di questa equazione differenziale è

$$w = B\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}ct/m} + D,$$

dove $B = C\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$ e $D = a + \mathrm{i}b$ sono delle costanti complesse arbitrarie e quindi

$$x = C\cos(\omega t + \alpha) + a, \qquad y = C\,\mathrm{sen}(\omega t + \alpha) + b,$$

con $\omega = c/m$, C, α, a e b costanti.

con $\omega = c/m$, A e α costanti, e per la (1) segue

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -A\cos(\omega t + \alpha)\,. \tag{5}$$

Dato che il lavoro $\mathscr{L}$ compiuto dalla forza $\mathbf{F}$ è nullo

$$\mathscr{L} = \int \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{s} = \int \mathbf{F}\cdot \mathbf{v}\,\mathrm{d}t = \int (\mathbf{c}\times\mathbf{v})\cdot\mathbf{v}\,\mathrm{d}t = 0\,,$$

dal teorema delle forze vive segue che l'energia cinetica del punto materiale rimane costante nel tempo e quindi

$$\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) + \dot{z}^2(t) = \text{costante}\,.$$

Poiché $\dot{z} = K$, la somma di $\dot{x}^2$ e $\dot{y}^2$ è ancora una costante, perciò la dipendenza di $\dot{y}$ dal tempo deve essere del tipo

$$\dot{y} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \pm A\cos(\omega t + \alpha)\,,$$

in accordo con la (5).

Integrando le equazioni (4) e (5) si ottiene

$$x = -\frac{A}{\omega}\cos(\omega t + \alpha) + a\,, \qquad y = -\frac{A}{\omega}\,\mathrm{sen}(\omega t + \alpha) + b\,,$$

con a e b costanti. Da queste due ultime equazioni, quadrandole e sommandole membro a membro fra loro, si ha

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = \frac{A^2}{\omega^2}\,,$$

che è l'equazione di un cerchio di raggio A/ω Le possibili traiettorie del punto sono quindi eliche cilindriche di passo costante K e asse parallelo al vettore $\mathbf{c}$.

Esercizio 67 (Dinamica del punto materiale, Gravitazione)

Il periodo di rotazione della Luna attorno alla Terra è $T_L = 27.32$ giorni e la sua orbita è approssimativamente circolare di raggio $d = 384\,400$ km; per l'accelerazione di gravità alla superficie terrestre si usi il valore $g = 9.81\ \mathrm{m/s^2}$. Usando i dati precedenti, si valuti:

a) **il raggio r_T della Terra;**

b) **la distanza d_s dal centro della Terra e il modulo v_s della velocità di un satellite artificiale in rotazione su un'orbita circolare situata nel piano equatoriale terrestre, con periodo $T_s =$ 1 giorno. (Si trascuri l'attrazione esercitata sul satellite dalla Luna e dagli altri corpi celesti.)**

a) Un sistema di riferimento solidale al centro della Terra e con orientazione invariabile rispetto alle stelle fisse, è con buona approssimazione un sistema inerziale e in tale sistema il moto della Luna è circolare uniforme con velocità di modulo v_L. Si ha quindi

$$\frac{Gm_Tm_L}{d^2} = \frac{m_Lv_L^2}{d} = \frac{4\pi^2 m_L d}{T_L^2},$$

dove G e m_L indicano, rispettivamente, la costante di gravitazione universale e la massa della Luna. Dalla relazione precedente segue

$$Gm_T = \frac{4\pi^2 d^3}{T_L^2} = 4.02 \times 10^{14}\ \mathrm{m^3/s^2},$$

e poiché $g = Gm_T/r_T^2$ si ottiene

$$r_T = \sqrt{\frac{Gm_T}{g}} = 6\,405\ \mathrm{km}.$$

b) Affinché il satellite (di massa m_s) ruoti attorno alla Terra con periodo $T_s = 1$ giorno devono essere soddisfatte le relazioni

$$\begin{cases} \dfrac{Gm_Tm_s}{d_s^2} = \dfrac{m_sv_s^2}{d_s}, \\ 2\pi d_s = v_sT_s, \end{cases}$$

dalle quali si ricava

$$d_s = \left(\frac{Gm_TT_s^2}{4\pi^2}\right)^{1/3} = \left(\frac{T_s}{T_L}\right)^{2/3} d = 4.24 \times 10^4\ \mathrm{km},$$

$$v_s = \left(\frac{2\pi Gm_T}{T_s}\right)^{1/3} = 3.08\ \mathrm{km/s},$$

avendo usato i dati numerici forniti nel problema.

Esercizio 68 (Dinamica del punto materiale, Gravitazione)

Un razzo di massa m viene lanciato dalla Terra in direzione del Sole con velocità v_0. Nota la distanza d tra la Terra e il Sole, la massa m_S e il raggio r_S del Sole, la massa m_T e il raggio r_T della Terra e la costante G di gravitazione universale, si calcoli

$a)$ il valore v_0^* tale che se $v_0 > v_0^*$ il razzo raggiunge il Sole;

$b)$ la velocità con la quale il razzo giunge sulla superficie solare nel caso $v_0 > v_0^*$.
(Si trascuri la distanza dal suolo del punto di partenza del razzo rispetto al raggio della Terra.)

$a)$ Quando il razzo si trova a distanza r_1 dal centro della Terra e distanza $r_2 = d - r_1$ dal centro del Sole, è soggetto alla forza risultante

$$\mathbf{F} = Gm\left(-\frac{m_T}{r_1^2} + \frac{m_S}{r_2^2}\right) \text{vers}\,\mathbf{d}\,, \tag{1}$$

dove $\mathbf{d}$ è il vettore distanza Terra-Sole. Tale forza è nulla quando

$$r_1 = r_1^* = \frac{-m_T + \sqrt{m_S m_T}}{m_S - m_T}d\,,$$

è diretta verso la Terra per $r_1 < r_1^*$, verso il Sole per $r_1 > r_1^*$. La velocità minima v_0^*, al di sopra della quale il razzo raggiunge il Sole, è quella che permette al razzo di giungere con velocità nulla a distanza r_1^* dal centro della Terra. Corrispondentemente, il lavoro compiuto dalla forza $\mathbf{F}$ è $\mathscr{L}^* = U(r_T) - U(r_1^*)$, dove $U(r)$ indica l'energia potenziale del razzo nel campo di forze gravitazionali a distanza r dal centro della Terra, data da

$$U(r) = Gm\left(-\frac{m_T}{r} - \frac{m_S}{d-r}\right)\,.$$

Si ha quindi:

$$\mathscr{L}^* = U(r_T) - U(r_1^*) = Gm\left[m_T\left(\frac{1}{r_1^*} - \frac{1}{r_T}\right) + m_S\left(\frac{1}{d-r_1^*} - \frac{1}{d-r_T}\right)\right]\,.$$

Dal teorema delle forze vive, se la velocità del razzo è nulla quando $r = r_1^*$, si ricava

$$\mathscr{L}^* = -\frac{1}{2}mv_0^{*2}\,, \qquad v_0^* = \sqrt{\frac{-2\mathscr{L}^*}{m}}\,.$$

$b)$ La velocità v con la quale il razzo giunge sulla superficie del Sole si può ottenere usando nuovamente il teorema delle forze vive o, equivalentemente, la conservazione dell'energia meccanica, col risultato

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = U(r_T) - U(d - r_S)\,,$$

$$v^2 = v_0^2 + 2\left[\frac{U(r_T) - U(d-r_S)}{m}\right] = v_0^2 - 2G\left[\frac{m_S}{d-r_T} + \frac{m_T}{r_T} - \frac{m_T}{d-r_S} - \frac{m_S}{r_S}\right]\,.$$

Esercizio 69 (Dinamica del punto materiale)

Un disco omogeneo ruota con velocità angolare costante ω_0 intorno a un asse verticale passante per il suo centro. Il disco presenta lungo un diametro una scanalatura entro la quale può scorrere senza attrito una pallina di massa m collegata al centro del disco da una molla di costante elastica k e lunghezza di riposo l. Si mostri che l'allungamento della molla è finito per particolari valori di ω_0 e, corrispondentemente, si calcoli il periodo delle oscillazioni effettuate dalla pallina se spostata dalla sua posizione di equilibrio.

Si consideri un sistema di riferimento solidale al disco con l'asse z coincidente con l'asse di rotazione, l'asse x lungo la scanalatura e l'origine nel centro del disco. A causa della rotazione del disco il riferimento non è inerziale, quindi per applicare la relazione $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$, essendo $\mathbf{a}$ l'accelerazione della pallina rispetto al sistema di riferimento considerato, devono venire incluse in $\mathbf{F}$ le forze apparenti, in questo caso la forza centrifuga e la forza di Coriolis

$$\mathbf{F}_{Co} = 2m\boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{v}_R ,$$

$\mathbf{v}_R$ indicando la velocità della pallina relativa al riferimento in esame. Quest'ultima forza è diretta lungo l'asse y, cioè è normale all'asse x e quindi non ha effetto sul moto della pallina (l'attrito lungo la scanalatura è nullo per ipotesi).
Nella posizione di equilibrio, di ascissa x_e, la forza di richiamo della molla è opposta alla forza centrifuga, quindi

$$k(x_e - l) = m\omega_0^2 x_e , \qquad x_e = \frac{kl}{k - m\omega_0^2} .$$

L'allungamento della molla risulta finito se $\omega_0 < \sqrt{k/m}$. Se la condizione precedente è soddisfatta, l'equazione di moto della pallina risulta

$$m\frac{\mathrm{d}^2 x(t)}{\mathrm{d}t^2} = -k[x(t) - l] + m\omega_0^2 x ,$$

che in termini della variabile $X = x_e - x$ si scrive:

$$m\frac{\mathrm{d}^2 X}{\mathrm{d}t^2} = -(k - m\omega_0^2)X .$$

Poiché $\omega_0^2 < k/m$, l'equazione precedente coincide con quella di un oscillatore armonico di periodo

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{k/m - \omega_0^2}} .$$

Esercizio 70 (Dinamica del punto materiale)

Una piattaforma orizzontale ruota in senso antiorario con velocità angolare costante ω intorno a un asse verticale. Sulla piattaforma, a distanza d dall'asse di rotazione, si trova una torre di altezza h dalla sommità della quale si lascia cadere, sotto l'azione della forza peso, un corpo di massa m. Si studi il moto del corpo, in un sistema di riferimento solidale al suolo, nei due casi seguenti: la velocità con cui il corpo viene lasciato cadere dalla sommità della torre è

a) **nulla rispetto al suolo,**

b) **nulla rispetto a un sistema di riferimento solidale alla piattaforma.**

(Si consideri trascurabile la resistenza offerta dall'aria.)

Si consideri un sistema di riferimento cartesiano ortogonale X, Y, Z solidale al suolo, con l'asse Z coincidente con l'asse di rotazione e orientato verso l'alto e l'asse X passante per la posizione occupata dalla base della torre all'istante $t = 0$ di lancio.
La posizione del corpo per $t = 0$ è individuata da

$$X(0) = d\,, \qquad Y(0) = 0\,, \qquad Z(0) = h\,. \tag{1}$$

Il corpo si muove verso il basso con accelerazione **g**, quindi

$$Z(t) = h - \frac{1}{2}gt^2\,;$$

l'istante τ in cui il corpo raggiunge la piattaforma resta determinato dalla condizione $Z(\tau) = 0$ e risulta $\tau = \sqrt{2h/g}$. Le componenti secondo gli assi X e Y della velocità del corpo restano costanti nel tempo:

$$\dot{X}(t) = \dot{X}(0)\,, \qquad \dot{Y}(t) = \dot{Y}(0)\,.$$

a) È $\dot{X}(0) = 0$, $\dot{Y}(0) = 0$. Tenendo conto delle condizioni iniziali espresse dalle (1), si ottiene

$$X(t) = d\,, \qquad Y(t) = 0\,,$$

cioè il corpo cade lungo la verticale passante per la posizione di lancio all'istante $t = 0$.

b) È $\dot{X}(0) = 0$, $\dot{Y}(0) = \omega d$. Tenendo conto delle condizioni date dalle (1), si ottiene

$$X(t) = d\,, \qquad Y(t) = \omega d t\,,$$

cioè il corpo descrive una parabola in un piano parallelo al piano YZ e il punto in cui il corpo raggiunge la piattaforma ha coordinate

$$X(\tau) = d\,, \qquad Y(\tau) = \omega d\sqrt{\frac{2h}{g}}\,, \qquad Z(\tau) = 0\,.$$

Esercizio 71 (Dinamica del punto materiale)

Nelle condizioni fissate nel problema precedente si studi il moto del corpo usando un sistema di riferimento cartesiano ortogonale x, y, z solidale alla piattaforma.

L'asse z sia orientato verso l'alto e coincida con l'asse di rotazione, l'asse x passi per la posizione occupata dalla base della torre. La posizione del corpo all'istante $t = 0$ di lancio è individuata da

$$x(0) = d\,, \qquad y(0) = 0\,, \qquad z(0) = h\,. \tag{1}$$

Il sistema di riferimento considerato è non inerziale, perciò assieme alla forza peso $m\mathbf{g}$ bisogna considerare le forze apparenti $-m\mathbf{a}_{tr}$ e $-m\mathbf{a}_{Co}$. La quantità vettoriale $\mathbf{a}_{tr}$ è l'accelerazione di trascinamento, cioè l'accelerazione rispetto al sistema (inerziale) solidale al suolo del punto del sistema x, y, z nel quale si trova il corpo: poiché rispetto al suolo il sistema si muove con moto circolare uniforme, $\mathbf{a}_{tr}$ è un'accelerazione centripeta data dalla formula

$$\mathbf{a}_{tr} = -\omega^2(x\mathbf{i} + y\mathbf{j})\,,$$

$\mathbf{i}$ e $\mathbf{j}$ indicando i versori degli assi x e y. Il vettore $\mathbf{a}_{Co} = 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}$ è l'accelerazione di Coriolis, $\mathbf{v}$ essendo la velocità del corpo rispetto al sistema x, y, z. Poiché $\boldsymbol{\omega}$ è parallelo all'asse z, le componenti dell'accelerazione di Coriolis risultano

$$a_{Co,x} = -2\omega\dot{y}\,, \qquad a_{Co,y} = 2\omega\dot{x}\,, \qquad a_{Co,z} = 0\,.$$

L'equazione del moto del corpo è allora

$$m\mathbf{a} = m\mathbf{g} - m\mathbf{a}_{tr} - m\mathbf{a}_{Co}\,,$$

$$\mathbf{a} = \mathbf{g} + (\omega^2 x + 2\omega\dot{y})\mathbf{i} + (\omega^2 y - 2\omega\dot{x})\mathbf{j}\,,$$

e in termini delle componenti cartesiane si ha

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = \omega^2 x + 2\omega\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\,, \qquad \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} = \omega^2 y - 2\omega\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\,, \qquad \frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2} = -g\,. \tag{2}$$

Il moto lungo la verticale è identico a quello del problema precedente:

$$z(t) = h - \frac{1}{2}gt^2\,,$$

e il tempo di caduta è $\tau = \sqrt{2h/g}$. Dalla prima delle equazioni (2) si ricava

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{2}\omega x + \frac{1}{2\omega}\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}, \qquad \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{1}{2}\omega\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{2\omega}\frac{\mathrm{d}^3 x}{\mathrm{d}t^3}; \tag{3}$$

l'ultima equazione sostituita nella seconda delle (2), fornisce le relazioni

$$y = \frac{3}{2\omega}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{2\omega^3}\frac{\mathrm{d}^3 x}{\mathrm{d}t^3}, \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{3}{2\omega}\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + \frac{1}{2\omega^3}\frac{\mathrm{d}^4 x}{\mathrm{d}t^4}. \tag{4}$$

Sostituendo nella (3) l'espressione ottenuta per $\mathrm{d}y/\mathrm{d}t$, si ottiene

$$\frac{\mathrm{d}^4 x}{\mathrm{d}t^4} + 2\omega^2\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + \omega^4 x = 0, \tag{5}$$

un'equazione differenziale lineare, omogenea, a coefficienti costanti e del quarto ordine. La funzione

$$x(t) = c\,\mathrm{e}^{\gamma t},$$

con c e γ costanti, è una soluzione della (5) se γ soddisfa l'equazione

$$\gamma^4 + 2\omega^2\gamma^2 + \omega^4 = 0,$$

con le radici

$$\gamma = \pm\mathrm{i}\omega.$$

L'equazione (5) è del quarto ordine, perciò ammette quattro soluzioni tra loro linearmente indipendenti. Per γ si sono ottenuti solo i due valori $+\mathrm{i}\omega$ e $-\mathrm{i}\omega$, tuttavia anche le funzioni

$$x(t) = ct\,\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\omega t},$$

sono soluzioni della (5), come può verificarsi per sostituzione.

La soluzione generale della (5) è quindi

$$x(t) = c_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} + c_2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} + c_3 t\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} + c_4 t\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t},$$

che si può scrivere anche nella forma

$$x(t) = A\,\mathrm{sen}(\omega t + \alpha) + Bt\,\mathrm{sen}(\omega t + \beta),$$

dove A, B, α e β sono costanti da determinarsi in base alle condizioni iniziali. Se si sostituisce nella (4) l'espressione sopra ottenuta per $x(t)$ si ricava $y(t)$, e in conclusione:

$$\begin{cases} x(t) = A\,\mathrm{sen}(\omega t + \alpha) + Bt\,\mathrm{sen}(\omega t + \beta), \\ y(t) = A\cos(\omega t + \alpha) + Bt\cos(\omega t + \beta). \end{cases} \tag{6}$$

a) Le condizioni iniziali sono:

$$x(0) = d\,, \qquad y(0) = 0\,, \qquad \dot{x}(0) = 0\,, \qquad \dot{y}(0) = -\omega d\,.$$

Dalle (6) seguono allora le relazioni

$$\begin{cases} A \operatorname{sen} \alpha = d\,, \\ A \cos \alpha = 0\,, \end{cases} \qquad \begin{cases} A\omega \cos \alpha + B \operatorname{sen} \beta = 0\,, \\ A\omega \operatorname{sen} \alpha - B \cos \beta = \omega d\,, \end{cases}$$

le cui soluzioni sono

$$A = d\,, \qquad \alpha = \pi/2\,\text{rad}, \qquad B = 0\,, \qquad \beta = \text{ qualsiasi valore.}$$

In conclusione, si ha

$$\begin{cases} x(t) = d \cos \omega t\,, \\ y(t) = -d \operatorname{sen} \omega t\,, \end{cases}$$

cioè la proiezione del corpo sul piano xy si muove di moto circolare uniforme, in senso orario, con velocità angolare di modulo ω.

b) In questo caso le condizioni iniziali sono

$$x(0) = d\,, \qquad y(0) = 0\,, \qquad \dot{x}(0) = 0\,, \qquad \dot{y}(0) = 0\,.$$

Procedendo come nel caso precedente si ottiene

$$\begin{cases} x(t) = d(\cos \omega t + \omega t \operatorname{sen} \omega t)\,, \\ y(t) = -d(\operatorname{sen} \omega t - \omega t \cos \omega t)\,. \end{cases}$$

Esercizio 72 (Dinamica del punto materiale)

Un tubicino cilindrico rigido, di sezione trascurabile, ruota in un piano verticale, con velocità angolare costante ω intorno a un asse orizzontale; dentro il tubicino può scivolare senza attrito una pallina di massa m. All'istante $t = 0$ il tubicino è in posizione verticale, la pallina si trova al di sopra dell'asse di rotazione, a distanza d da esso e con velocità nulla rispetto al tubicino. Si studi il moto della pallina lungo il tubicino, approssimando la pallina a un punto materiale.

Si consideri un sistema di riferimento x, y, z solidale al tubicino, con l'asse z coincidente con l'asse di rotazione e l'asse x coincidente con l'asse del tubicino e orientato dall'asse di rotazione verso la posizione occupata dalla pallina all'istante $t = 0$. Sia $\theta = \omega t$ l'angolo formato dall'asse x con la verticale orientata verso l'alto. Il sistema di riferimento considerato è non inerziale: le forze agenti sopra la pallina sono la forza peso $m\mathbf{g}$, la reazione $\mathbf{R}$ sviluppata dalla parete del tubicino, le forze apparenti $-m\mathbf{a}_{tr}$ e $-m\mathbf{a}_{Co}$, dove $\mathbf{a}_{tr}$, e $\mathbf{a}_{Co}$ indicano, rispettivamente, l'accelerazione di trascinamento e l'accelerazione di Coriolis. Valgono le relazioni

$$\mathbf{a}_{tr} = -\omega^2 x\mathbf{i}\,, \qquad \mathbf{a}_{Co} = 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}\,,$$

dove $\mathbf{i}$ rappresenta il versore dell'asse x e $\mathbf{v}$ è la velocità della pallina rispetto al riferimento considerato: poiché $\mathbf{v} = \dot{x}\mathbf{i}$ e $\boldsymbol{\omega} = \omega\mathbf{k}$, si ottiene

$$\mathbf{a}_{Co} = 2\omega\dot{x}\mathbf{j}\,,$$

dove $\mathbf{j}$ e $\mathbf{k}$ rappresentano i versori degli assi y e z.
Secondo l'asse x la forza peso ha componente $-mg\cos\theta$, la reazione $\mathbf{R}$ (che è perpendicolare alla parete del tubicino essendo il vincolo liscio) ha componente nulla, l'accelerazione di trascinamento $\mathbf{a}_{tr}$ ha componente $-\omega^2 x$, l'accelerazione di Coriolis ha componente nulla. L'equazione del moto lungo l'asse x è quindi

$$m\ddot{x} = -mg\cos\theta + m\omega^2 x\,, \qquad \ddot{x} - \omega^2 x = -g\cos\omega t\,. \tag{1}$$

La soluzione generale dell'equazione omogenea associata alla (1) è:

$$x_o(t) = A\,\mathrm{e}^{\omega t} + B\,\mathrm{e}^{-\omega t}\,,$$

con A e B costanti arbitrarie. La funzione

$$x_p(t) = C\cos\omega t\,,$$

è soluzione (particolare) dell'equazione (1) se $C = g/(2\omega^2)$. La soluzione generale della (1) è perciò

$$x(t) = x_o(t) + x_p(t) = A\,\mathrm{e}^{\omega t} + B\,\mathrm{e}^{-\omega t} + \frac{g}{2\omega^2}\cos\omega t\,. \tag{2}$$

Dalle condizioni iniziali $x(0) = d$, $\dot{x}(0) = 0$, si deduce

$$A = B = \frac{d}{2} - \frac{g}{4\omega^2}\,,$$

quindi

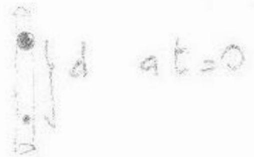
$$x(t) = \frac{1}{2}\left(d - \frac{g}{2\omega^2}\right)(\mathrm{e}^{\omega t} + \mathrm{e}^{-\omega t}) + \frac{g}{2\omega^2}\cos\omega t\,. \tag{3}$$

Esercizio 73 (Dinamica del punto materiale)

Si discuta la soluzione ottenuta nel problema precedente (vedi l'equazione (3) della soluzione) nei casi seguenti:

a) $\omega \to 0$;

b) ω **"molto grande".**



a) Si riscriva l'equazione (3) del problema precedente nella forma

$$x(t) = \frac{1}{2}d(\mathrm{e}^{\omega t} + \mathrm{e}^{-\omega t}) + g\,\frac{2\cos\omega t - \mathrm{e}^{\omega t} - \mathrm{e}^{-\omega t}}{4\omega^2}\,.$$

Il limite per $\omega \to 0$ del primo termine a secondo membro della precedente relazione è d, mentre il limite dell'altro termine si può calcolare applicando due volte di seguito la regola dello Hôpital e risulta $-\frac{1}{2}gt^2$: in conclusione

$$[x(t)]_{\omega=0} = d - \frac{1}{2}gt^2\,,$$

risultato prevedibile direttamente a priori.

b) Trascorso un tempo $t \gg 1/\omega$ si ha

$$x(t) \simeq \frac{1}{2}d\,\mathrm{e}^{\omega t}\,;$$

la forza peso ha quindi un effetto trascurabile rispetto alla forza centrifuga.